MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

1ª lista de exercícios - 2008

POLINÔMIO DE TAYLOR

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

   (a) $\sqrt[3]{8,2}$

   (b) $\ln(1,3)$

   (c) $\operatorname{sen}(0,1)$

2. Mostre que:

   (a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3 \ , \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$

   (b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right) < \dfrac{1}{2}x^3 \ , \ \ \forall\, x \in [0,1]\,.$

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. (a) Seja n um número natural ímpar. Mostre que

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \quad , \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

5. (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

   (b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5}.

   (c) Mostre que

$$\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \leq \frac{e^{x^2}x^{2n+2}}{(n+1)!} \quad , \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   (d) Avalie $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que $\displaystyle\left|\int_0^1 \cos(x^2)\,dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right)\right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \ln x$ em torno de $x_0 = 1$. Mostre que

$$|\ln x - P_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} \quad , \ \forall\, x \in \,]1, +\infty[$$

   e avalie $\ln(1,01)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

8. Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = e^x \cos\, x$ em torno de $x_0 = 0$ e mostre que

$$\left| e^{x^2} \cos(x^2) - \left(1 + x^2 - \frac{x^6}{3}\right) \right| \leq \frac{x^8}{2} \quad , \ \forall\, x \in [-1, 1]\,.$$

9. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f é derivável até $2^{\underline{a}}$ ordem em I e f'' é contínua no ponto a. Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o "teste da segunda derivada", isto é, prove as seguintes afirmações:

   (a) Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então a é um ponto de mínimo local de f.

   (b) Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então a é um ponto de máximo local de f.

CURVAS E SUPERFÍCIES

10. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$

   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi$

   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$

   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$

   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$

   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)\ ,\ t \geq 0$

   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)\ ,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

11. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical. Esboce a imagem de γ, explicitando os pontos de auto-intersecção (se houver).

   (a) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$

   (b) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$

   (c) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$

   (d) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$

   (e) $\gamma(t) = (\ln(1 + t^2), t^3 - 3t)$

   (f) $\gamma(t) = (t(t^4 - 1), t^4 - 1)$

12. (a) Considere a curva dada por $\gamma(t) = \left(\dfrac{2t}{1 + t^2}, \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quanto $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Estude $\gamma\,'(t)$ e faça um esboço da curva.

   (b) Considere a curva dada por

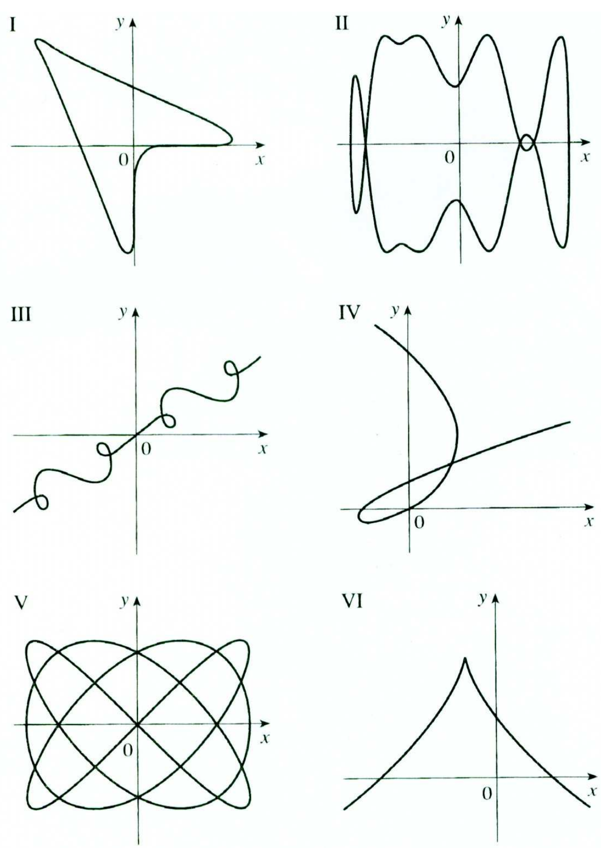
$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)$$

   Determine o domínio de γ. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quando t tende a -1 pela direita e pela esquerda, bem como os limites quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Calcule $\gamma(0)$. Estude $\gamma\,'(t)$ e faça um esboço da curva.

(c) Considere a curva dada por $\gamma(t) = (t^3 - 12t, t^2 - 2t)$. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quanto $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Estude $\gamma'(t)$ e a concavidade da imagem de γ. Faça um esboço da curva.

13. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

(a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$
(b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
(c) $x = \text{sen}\,(3t), \quad y = \text{sen}\,(4t)$
(d) $x = t + \text{sen}\,(2t), \quad y = t + \text{sen}\,(3t)$
(e) $x = \text{sen}\,(t + \text{sen}\,t), \quad y = \cos(t + \cos t)$
(f) $x = \cos t, \quad y = \text{sen}\,(t + \text{sen}\,(5t))$



14. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

15. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \text{sen}\ t \cos\ t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Esboce a curva.

16. Para cada curva abaixo, determine um ponto onde ocorre uma auto-intersecção. Ache as retas tangentes nesse ponto.

(a) $\gamma(t) = (1 - 2\cos^2 t\,,\, (1 - 2\cos^2 t)\,\text{tg}\ t)\ ,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(b) $\gamma(t) = (9(1 - 3t^2)\,,\, 9t(1 - 3t^2))$

(c) $\gamma(t) = \left(2 + 2\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)\,,\, 2t\left(\frac{1}{1 - t^2} + \frac{2}{1 + t^2}\right)\right)$

17. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

18. Calcular o comprimento da curva γ:

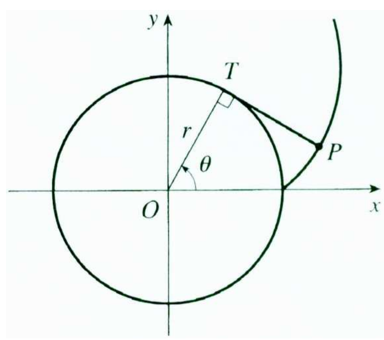
   (a) $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$, $t \in [-4, 4]$;

   (b) $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in [0, \pi]$;

   (c) $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

19. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



20. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

   (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^x}$

   (e) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x - y)$

   (f) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$

   (g) $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

21. Esboce uma família de curvas de nível de:

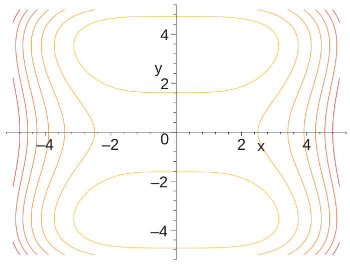
   (a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

   (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$

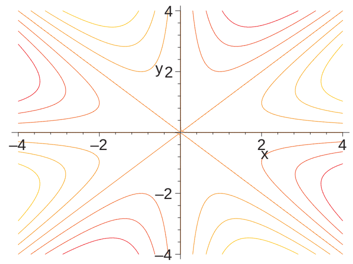
   (c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

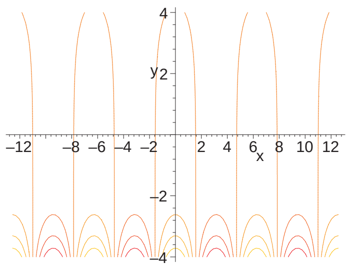
22. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



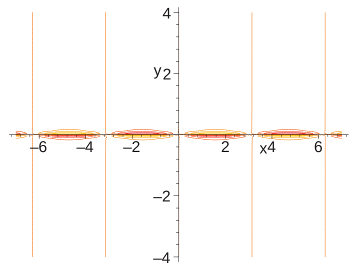
(I)



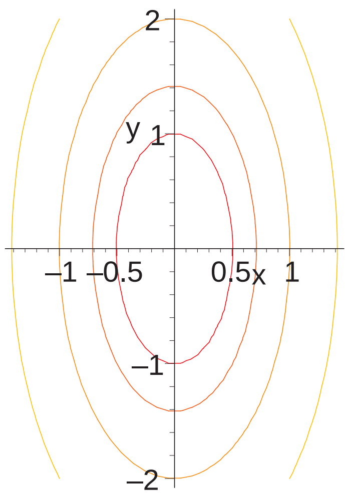
(II)



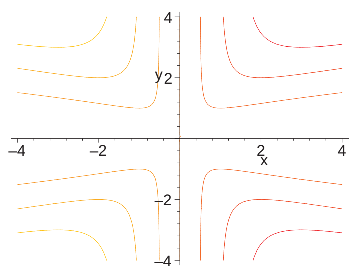
(III)



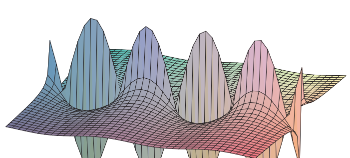
(IV)



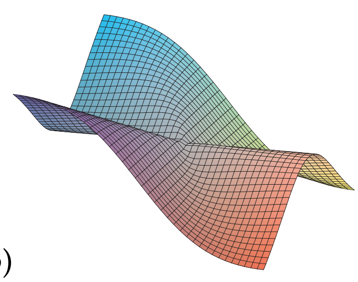
(V)



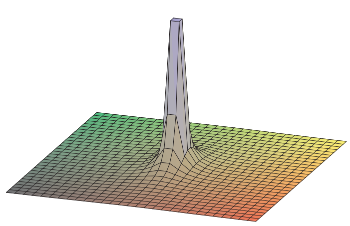
(VI)



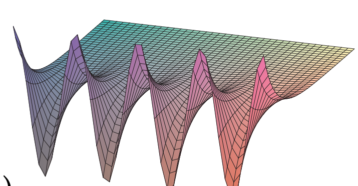
(a)



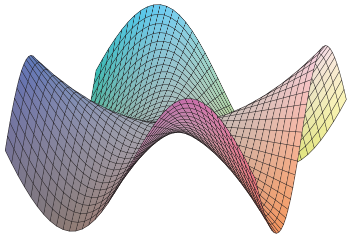
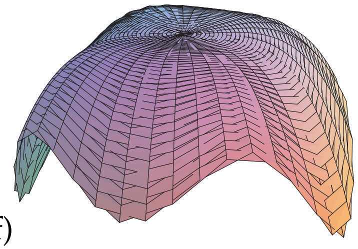
(b)



(c)



(d)

(e)  (f) 

23. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$
(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2+y^2+2y+3$
(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

24. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

(a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

(b) A imagem de γ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

25. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

(a) $z + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 +^3 z^2 = 1$
(b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
(d) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (e) $x^2 - y^2 = 1$
(f) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

LIMITES E CONTINUIDADE

26. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

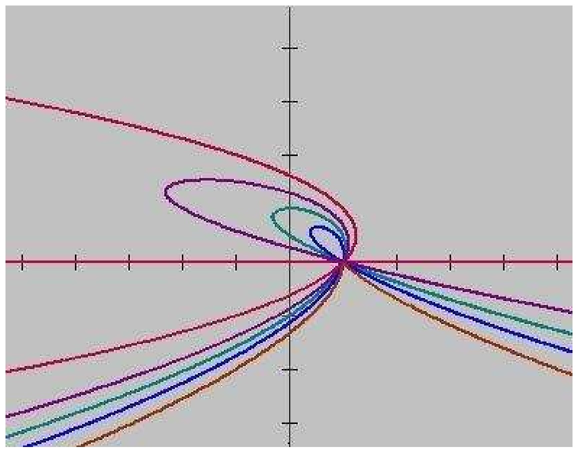
(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$ (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

27. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

28. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



29. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se } \ (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

RESPOSTAS

11. (a) Horizontal: $(0,-9)$; Vertical: $(-2,-6),(2,-6)$;
(b) Horizontal: $(-2,-2),(-4,2)$; Vertical: $(0,0)$, $(-4,2)$;
(c) Horizontal: $(-3,-2),(1,2)$; Vertical: $(0,0)$, $\left(-\dfrac{3}{16},\dfrac{11}{8}\right)$ e $(-8,2)$;
(d) Horizontal: $(4,-16)$, $(-28,16)$; Vertical: $(0,0)$, $(-1,-11)$.
Auto-intersecção: (a) $(0,0)$; (b) $(-4,2)$; (c) e (d) não têm.

14. Não. $\gamma(t)=(t^3,t^2)$

15. $y=x$ e $y=-x$
16. (a) (0,0), $y=x$ e $y=-x$;
(b) (0,0), $y=\sqrt{3}x$ e $y=-\sqrt{3}x$;
(c) (1,0), $y=-\sqrt{3}x$ e $y=\sqrt{3}x$

18. (a) $L(\gamma)=\int_a^b ||\gamma'(t)||$ (b) $L(\gamma_1)=64\sqrt{5}$;
(c) $L(\gamma_2)=2\sqrt{2}$; (d) $L(\gamma_3)=\dfrac{\pi^2}{2}$.

19.(a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y\leq x\}$

(b) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\neq 0\}$

(c) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2>1\}$

(d) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$

(e) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y\neq x+\frac{1+2k}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

(f) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x(y-x)(y+x)>0\}$

(g) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|4x^2+y^2<16\}$

24. (b) Sim, no nível 5.

25. Apenas a superfície do item (a).

26. (a) não existe (b) 0 (c) 0
(d) não existe (e) não existe (f) não existe
(g) não existe (h) 0 (i) 0 (j) 0

27. (a) 1 (b) 0

29. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x,y)\neq(0,0)\}$