A

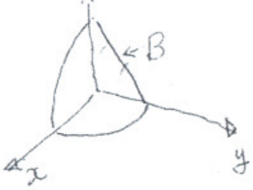
3. (3 pontos) Dado o problema:

"Encontrar o maior valor para o produto de três números positivos x, y e z com a restrição $x^2 + y + z = 1$."

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Encontre a solução.

a) O problema consiste em encontrar o valor máximo da função $f(x,y,z) = xyz$ no conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y+z=1,\ x>0, y>0, z>0\}$



Seja $C = \bar{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y+z=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}^3$ e C é compacto, o Teorema de Weirstrass assegura que existe (pelo menos) um ponto de máximo de f em C. Como $f(x,y,z) = 0$ se x ou y ou z se anula e $f(x,y,z) > 0$ se x, y e z são todos positivos, os pontos de máximo têm que estar em B.

b) Sejam $f(x,y,z)$ e B como no ítem a)

$g(x,y,z) = x^2 + y + z - 1$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$.

Observando que:

i) A é aberto,

ii) $B = \{(x,y,z) \in A \mid g(x,y,z) = 0\}$,

iii) f e g são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$,

iv) $\nabla g(x,y,z) = (2x, 1, 1) \neq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

segue, do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que, se p é ponto de máximo de f em B, então

$\nabla f(p) = \lambda g(p)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim, os pontos de máximo de f em B estarão entre as soluções (x,y,z) do sistema:

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x & (1) \\ xz = \lambda & (2) \\ xy = \lambda & (3) \\ x^2 + y + z = 1 & (4) \end{cases} \quad \text{com} \quad x>0,\ y>0,\ z>0.$$

De (2) e (3), obtemos

$$xz = xy \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} y = z.$$

De (1) e (2), obtemos $(x>0)$

$$\frac{yz}{2x} = xz \overset{z>0}{\Longleftrightarrow} y = 2x^2.$$

Portanto, segue que $x^2 = y/2$ e $z = y$.

Substituindo em (4):

$$\frac{y}{2} + y + y = 1 \Longleftrightarrow \frac{5}{2} y = 1 \Longleftrightarrow \boxed{y = 2/5}.$$

Daí $x^2 = y/2 = \frac{1}{5} \overset{x>0}{\Longrightarrow} \boxed{x = \sqrt{5}/5}$ e $\boxed{z = y = 2/5}$.

Portanto $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ é o único ponto de máximo de f em B e o valor máximo é $f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{125}$.

<u>Obs</u> O problema também pode ser resolvido usando primeiro a equação $x^2+y+z=1$ para obter uma das variáveis em função das outras e então substituindo na função $f(x,y,z) = xyz$ para obter um problema de maximização não condicionado.

3. (3 pontos) Dado o problema:

"Encontrar o maior valor para o produto de três números positivos x, y e z com a restrição $x + y^2 + z = 1$."

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Encontre a solução.

a) Ver prova A.

b) Sejam ~~B~~ $f(x,y,z) = xyz$, $g(x,y,z) = x+y^2+z-1$ e $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$.

Segue, do Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver justificativa na prova A) que, se P é ponto de máximo de f em B, então $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Os pontos de máximo de f em B estão entre as soluções (x,y,z) do sistema:

$$\begin{cases} yz = \lambda & (1) \\ xz = \lambda 2y & (2) \\ xy = \lambda & (3) \\ x+y^2+z = 1 & (4) \end{cases} \quad \text{com } x>0, y>0, z>0.$$

De (1) e (3) obtemos: $yz = xy \overset{y>0}{\iff} x = z$

De (1) e (2) obtemos ($y>0$): $yz = \frac{xz}{2y} \overset{z>0}{\iff} 2y^2 = x \iff y^2 = x/2$

Substituindo em (4):

$x + x/2 + x = 1 \iff \frac{5}{2}x = 1 \iff \boxed{x = 2/5}$

Daí, $z = x = 2/5$ e $y^2 = \frac{x}{2} = \frac{1}{5} \overset{y>0}{\Longrightarrow} y = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Portanto $\left(2/5, \frac{\sqrt{5}}{5}, 2/5\right)$ é o único ponto de máximo de f em B e o correspondente valor máximo é $f\left(2/5, \sqrt{5}/5, 2/5\right) = \frac{4\sqrt{5}}{125}$

obs: Ver observação sobre outra possível solução na prova A.