A

2. (3,5 pontos) Seja $f(x,y) = \frac{y^3}{3} + x^2 + 2kxy + 3x$, onde k é constante real.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f para $k = 1$.

b) Determine os valores de k para os quais f possui um único ponto crítico.

c) Para o maior dos valores de k encontrados no item b), classsifique o ponto crítico.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2ky + 3$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 + 2kx$ e $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2y \end{vmatrix} = 4(y - k^2)$

a) para $k = 1$:

(x,y) é ponto crítico $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3 = 0 \\ y^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -1$

$x = -\frac{y^2}{2}$. Logo, os pontos críticos são $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ e $\left(-\frac{9}{2}, 3\right)$.

$H\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = -8 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(-\frac{1}{2}, -1\right) \text{ é ponto de sela}}$

$H\left(-\frac{9}{2}, 3\right) = 8 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-9/2, 3) = 2 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(-\frac{9}{2}, 3\right) \text{ é ponto de mínimo local}}$

b) O sistema $\begin{cases} 2x + 2ky + 3 = 0 \\ y^2 + 2kx = 0 \end{cases}$ deve ter uma única solução.

Multiplicando a 1ª por k e subtraindo da 2ª, obtemos

$$y^2 - 2k^2y - 3k = 0$$

para que esta última tenha uma única solução, devemos ter

$4k^4 + 12k = 0$, isto é, $4k(k^3 + 3) = 0$. Logo, $\boxed{k = 0 \text{ ou } k = -\sqrt[3]{3}}$

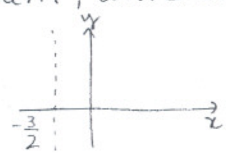
c) O maior valor é $k = 0$. Neste caso,

$f(x,y) = \frac{y^3}{3} + x^2 + 3x$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

Temos $H(-3/2, 0) = 0$. O critério do Hessiano nada afirma. Porém, considerando f sobre a reta $x = -3/2$, obtemos

$f\left(-\frac{3}{2}, y\right) = \frac{y^3}{3} - \frac{9}{4}$ (é estritamente crescente)



Como $y = 0$ não é ponto de extremo local da função $\frac{y^3}{3} - \frac{9}{4}$, concluímos que $\boxed{\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ é um ponto de sela de } f}$

B

2. (3,5 pontos) Seja $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 + 2kxy + 3y$, onde k é constante real.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f para $k = 1$.

b) Determine os valores de k para os quais f possui um único ponto crítico.

c) Para o maior dos valores de k encontrados no item b), classsifique o ponto crítico.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + 2ky$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2kx + 3$ e $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2k \\ 2k & 2 \end{vmatrix} = 4(x - k^2)$

a) para $k = 1$:

(x,y) é ponto crítico $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ 2y + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$

$y = -\frac{x^2}{2}$. logo, os pontos críticos são $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$

$H\left(-1,-\frac{1}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \text{ é ponto de sela}}$

$H\left(3, -\frac{9}{2}\right) = 8 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, -9/2) = 6 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(3,-\frac{9}{2}\right) \text{ é ponto de mínimo local}}$

b) O sistema $\begin{cases} x^2 + 2ky = 0 \\ 2y + 2kx + 3 = 0 \end{cases}$ deve ter uma única solução.

Multiplicando a 2ª por k e subtraindo da 1ª, obtemos

$$x^2 - 2k^2x - 3k = 0$$

para que esta última tenha uma única solução, devemos ter

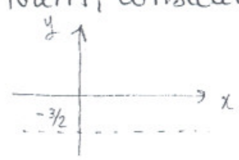
$4k^4 + 12k = 0$, isto é, $4k(k^3+3) = 0$. logo, $\boxed{k = 0 \text{ ou } k = -\sqrt[3]{3}}$

c) O maior valor de k é $k = 0$. Neste caso,

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 + 3y$$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Temos $H(0,-3/2) = 0$. O critério do Hessiano nada afirma. Porém, considerando f sobre a reta $y = -3/2$, obtemos



$f\left(x, -\frac{3}{2}\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}$ é estritamente crescente

Como $x = 0$ não é ponto de extremo local da função $\frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}$, concluímos que $\boxed{\left(0,-\frac{3}{2}\right) \text{ é um ponto de sela de } f.}$