A

1. (3,5 pontos) Seja S a superfície $x^2 - 2xy - 2y + z^2 = 0$.

a) Encontre uma parametrização para a curva (fechada) obtida pela intersecção de S com o plano $z = x + y$.

b) Determine um vetor tangente à intersecção de S com a superfície
$e^x + y^2 - 3y + z^2 + x^2y - 5z = -7$ no ponto $(0, 2, 2)$.

c) Determine os pontos da superfície $x^3 + xyz + z^3 = 1$ cujos planos tangentes são ortogonais ao vetor obtido no item b).

a) $\begin{cases} z = x+y \\ x^2 - 2xy - 2y + z^2 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 2xy - 2y + (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1/2} + (y-1)^2 = 1$

$\therefore \gamma(t): \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y(t) = 1 + \operatorname{sen} t \\ z(t) = 1 + \operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Um vetor tg à intersec. das superfícies de nível 0 de
$F(x,y,z) = x^2 - 2xy - 2y + z^2$ e $G(x,y,z) = e^x + y^2 - 3y + z^2 + x^2y - 5z + 7$
em $(0,2,2)$ é paralelo ao $\vec{\nabla} F \wedge \vec{\nabla} G\,(0,2,2)$.

Como
$(\nabla F \wedge \nabla G)(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x - 2y & -2x - 2 & 2z \\ e^x + 2xy & 2y - 3 + x^2 & 2z - 5 \end{vmatrix}$,

temos
$(\nabla F \wedge \nabla G)(0,2,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, -2)$.

$\therefore$ um vetor tg pode ser $\vec{v} = (1,0,1)$

c) $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ é perpendicular ao plano tg à sup de nível 0 de $f(x,y,z) = x^3 + xyz + z^3 - 1$ em cada pto.

Logo $\vec{v}$ é paralelo ao $\vec{\nabla} f$, i.e. $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ quero encontrar (x,y,z) tq

$\begin{cases} 3x^2 + yz = \lambda & (1) \\ xz = 0 \Rightarrow \underbrace{x = 0}_{1^\circ\text{ caso}} \text{ ou } \underbrace{z = 0}_{2^\circ\text{ caso}} \\ 3z^2 + xy = \lambda & (2) \\ x^3 + xyz + z^3 = 1 & (3) \end{cases}$

1º caso $x = 0$ em (1) e (2) obtemos

$\begin{cases} yz = \lambda \\ 3z^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow yz - 3z^2 = 0$

$z(y - 3z) = 0$

i.e. $z = 0 \Rightarrow$ abs. eq (3).

ou $\left.\begin{matrix} y = 3z \\ \text{de (3)}.\ z^3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} z = 1 \\ y = 3 \end{matrix}$

2º caso $z = 0$ em (1) e (2) obtemos

$\begin{cases} 3x^2 = \lambda \\ xy = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} xy - 3x^2 = 0 \\ x(y - 3x) = 0 \end{matrix}$

i.e. $x = 0 \Rightarrow$ abs eq (3)

ou $\left.\begin{matrix} y - 3x = 0 \\ \text{de (3)}: x^3 = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 1 \\ e\ y = 3 \end{matrix}$

$\therefore$ obtenho os pts $(0,3,1)$ e $(1,3,0)$ //

B

1. (3,5 pontos) Seja S a superfície $y^2 - 2xy - 2x + z^2 = 0$.

a) Encontre uma parametrização para a curva (fechada) obtida pela intersecção de S com o plano $z = x + y$.

b) Determine um vetor tangente à intersecção de S com a superfície

$e^y + x^2 - 3x + z^2 + xy^2 - 5z = -7$ no ponto $(2, 0, 2)$.

c) Determine os pontos da superfície $y^3 + xyz + z^3 = 1$ cujos planos tangentes são ortogonais ao vetor obtido no item b).

a) $\begin{cases} z = x+y \\ y^2-2xy-2x+z^2=0. \end{cases}$

$y^2-2xy-2x+(x+y)^2=0 \iff 2y^2+x^2-2x=0 \iff (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{1/2} = 1$

$\therefore \ \gamma(t): \begin{cases} x(t) = 1+\cos t \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t \\ z(t) = 1+\cos t + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$

b) Um vetor tg. à intersec. das superfícies de nível 0 de

$F(x,y,z) = y^2-2xy-2x+z^2$ e $G(x,y,z) = e^y+x^2-3x+z^2+xy^2-5z$

em $(2,0,2)$ é paralelo ao $\vec{\nabla}F \wedge \vec{\nabla}G(2,0,2)$.

Como $\vec{\nabla}F \wedge \vec{\nabla}G\,(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2y-2 & 2y-2x & 2z \\ 2x-3+y^2 & e^y+2xy & 2z-5 \end{vmatrix}$

temos $\vec{\nabla}F \wedge \vec{\nabla}G\,(2,0,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, +2, +2).$

$\therefore$ um vetor tg pode ser $\vec{v} = (0,1,1)$

c) $\vec{\nabla}f(x,y,z)$ é perpendicular ao plano tg à sup. de nível 0 de $f(x,y,z) = y^3+xyz+z^3-1$ em cada pto.

Logo $\vec{v}$ é paralelo ao $\vec{\nabla}f$, ie $\vec{\nabla}f(x,y,z) = \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ quero encontrar (x,y,z) tq $\begin{cases} yz=0 \Rightarrow \underbrace{y=0}_{1^{\circ}\text{ caso}} \text{ ou } \underbrace{z=0}_{2^{\circ}\text{ caso}} \\ 3y^2+xz=\lambda \quad (1) \\ 3z^2+xy=\lambda \quad (2) \\ y^3+xyz+z^3=1 \quad (3) \end{cases}$

1º caso se $y=0$ então em (1) e (2) obtemos $\begin{cases} xz=\lambda \\ 3z^2=\lambda \end{cases}$ logo $xz-3z^2=0$, $z(x-3z)=0$

ie $z=0 \Rightarrow$ abs. pela eq (3)

ou $\left.\begin{matrix} x=3z \\ \text{de (3) } z^3=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} z=1 \\ x=3 \end{matrix}$

2º caso: se $z=0$ então em (1) e (2) obtemos $\begin{cases} 3y^2=\lambda \\ xy=\lambda \end{cases}$ logo $xy-3y^2=0$, $y(x-3y)=0$

ie $y=0 \Rightarrow$ abs pela eq (3)

ou $\left.\begin{matrix} x=3y \\ \text{de (3): } y^3=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y=1 \\ x=3 \end{matrix}$

$\therefore$ obtemos os ptos $(3,0,1)$ e $(3,1,0)$ //