B

3)[3,5] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

a) Sabendo que a imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2+1)$ está contida na curva de nível $f(x,y) = 8$, encontre um vetor $\vec{u}$ tal que $\nabla f(4,5)$ seja paralelo ao vetor $\vec{u}$.

b) Sabendo que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4,5,8)$ passa pelo ponto $(0,3,0)$, determine a equação deste plano tangente.

c) Dentre as curvas abaixo, uma não pode ter sua imagem contida no gráfico da função f dos ítens anteriores. Decida qual, e justifique o porquê.

$$i)\ \alpha(t) = \left(t, t+1, \frac{t^2}{3} - \frac{4t}{3} + 8\right)$$
$$ii)\ \mu(t) = \left(t^2, t+3, t^2+t^3-2t\right)$$

a) f diferenciável e γ derivável.
Como $\gamma(2) = (4,5)$, se $Im(\gamma) \subset$ na curva de nível 8 de f,
então $\nabla f(4,5) \perp \gamma'(2)$.
Mas $\gamma'(t) = (2, 2t) \Rightarrow \gamma'(2) = (2,4)$. Como $\nabla f(4,5) \perp (2,4)$
então $\nabla f(4,5) \,//\, (-2, 1)$

b) Sabemos que $\nabla f(4,5) = (-2a, a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Logo, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4,5,8)$ é da forma
$-2a(x-4) + a(y-5) = z-8$
Como $(0,3,0)$ pertence ao plano temos:
$-2a(-4) + a(3-5) = -8 \Leftrightarrow a = -4/3$.
Logo,
plano tangente: $\boxed{+8/3(x-4) - 4/3(y-5) = z-8}$
vetor normal: $\vec{n} = (8/3, -4/3, -1)$
$\nabla f(4,5) = (8/3, -4/3)$

c) $Im(\mu)$ não pode estar contida no $Graf(f)$
JUSTIFICATIVA: $\mu(2) = (4,5,8)$. Se $Im(\mu) \subset Graf(f)$, então o vetor tangente $\mu'(2)$ deve ser paralelo ao plano tangente ao $Graf(f)$ no ponto $(4,5,8)$. Ou seja, temos que ter
$\mu'(2) \cdot \vec{n} = 0$,
onde $\vec{n} = (8/3, -4/3, -1)$ é um vetor normal ao plano tangente.
Mas $\mu'(t) = (2t, 1, 2t+3t^2-2)$ e $\mu'(2) = (4, 1, 14)$ e verificamos que
$\vec{n} \cdot \mu'(2) = (8/3, -4/3, -1) \cdot (4, 1, 14) = -\frac{14}{3} \neq 0$
Logo, $Im(\mu)$ não pode estar contida em $Graf(f)$.