A

2)[3,5] Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v).$$

a) Determine $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ em função das derivadas parciais de f.

b) Determine $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$ em função das derivadas parciais de f.

c) Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$, sabendo que

$\nabla f(1,4) = (3,5)$, $f(1,4) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$.

a) Pela regra da cadeia

$$g_u(u,v) = f(u^2-v, u+2v) + u\left[f_x(u^2-v,u+2v).(2u) + f_y(u^2-v,u+2v).\boxed{1}\right]$$

e

$$g_v(u,v) = u.\left[f_x(u^2-v,u+2v).(-1) + f_y(u^2-v,u+2v).\boxed{2}\right]$$

b) Como f é C^2, pela regra da cadeia obtemos

$$g_{vu}(u,v) = (g_v)_u(u,v) = [f_x(u^2-v,u+2v)(-1) + f_y(u^2-v,u+2v)\boxed{2}]$$

$$+ u\left[f_{xx}(u^2-v,u+2v).(-1).(2u) + f_{xy}(u^2-v,u+2v).(-1)(1) + \right.$$

$$\left. + f_{yx}(u^2-v,u+2v)(2).(2u) + f_{yy}(u^2-v,u+2v).(2).(1)\right]$$

f é C^2 então por Schwarz

$$\underline{\underline{\nabla}} \; -f_x(u^2-v,u+2v) + 2f_y(u^2-v,u+2v) - 2u^2 f_{xx}(u^2-v,u+2v)$$

$$+ u(4u-1)f_{xy}(u^2-v,u+2v) + 2u\, f_{yy}(u^2-v,u+2v)$$

c) Como

$$\left.\begin{array}{l} x(u,v) = u^2 - v \\ y(u,v) = u + 2v \\ u = -2 \\ v = 3 \end{array}\right\} \text{então} \left\{\begin{array}{l} x(-2,3) = 4-3 = 1 \\ y(-2,3) = -2+6 = 4 \end{array}\right.$$

Logo,

$$g_{vu}(-2,3) = -f_x(1,4) + 2\, f_y(1,4) - 8\, f_{xx}(1,4)$$

$$+ (-2)(-9)\, f_{xy}(1,4) + (-4)\, f_{yy}(1,4)$$

como

$$\nabla f(1,4) = \left(f_x(1,4),\, f_y(1,4)\right) = (3,5)$$

$$f_{xx}(1,4) = 1$$

$$f_{xy}(1,4) = 1$$

e $f_{yy}(1,4) = -1$

temos

$$g_{uv}(-2,3) = -3 + 2.(5) - 8.(1) + 18.(1) - 4(-1)$$

$$= -3 + 10 - 8 + 18 + 4$$

$$= 21$$