1)[3,0] Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine se $F$ é contínua no ponto $(0,0)$.

b) Dado um vetor $\vec{u} = (a,b)$ com $\|\vec{u}\| = 1$, calcule, caso exista, a derivada direcional de $F$ na direção de $\vec{u}$ em $(0,0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0,0).$$

c) Decida se $F$ é diferenciável no ponto $(0,0)$. Justifique.

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, temos $F(x,y) = y \cdot \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ e $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, segue que

$0 = F(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \Longrightarrow F$ é contínua em $(0,0)$

b) Para $t \neq 0$,

$$\frac{F((0,0)+t\vec{u}) - F(0,0)}{t} = \frac{F(ta,tb)}{t} = \frac{t^3 a^2 \cdot b}{(t^2a^2+t^2b^2)\cdot t} = \frac{t^3 a^2 b}{t^3(a^2+b^2)} = a^2 \cdot b$$

$\therefore \dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} a^2 b = a^2 \cdot b$

c) Sendo $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (0,1)$, segue do ítem b que

$0 = \dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0,0) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ e $0 = \dfrac{\partial F}{\partial \vec{v}}(0,0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)$

Suponhamos que $F$ seja diferenciável em $(0,0)$.

Então temos, para todo versor $\vec{u} = (a,b)$

$\dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0,0) = \vec{\nabla} F(0,0) \cdot \vec{u} = 0$

Mas, pelo ítem b) $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq 0$ se $a$ e $b$ são ambos não nulos

$\therefore F$ não pode ser diferenciável em $(0,0)$.

Solução alternativa do ítem c

Se $(h,k) \neq (0,0)$

$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{F(0+h,0+k) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\cdot h - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\frac{h^2 k}{(h^2+k^2)\cdot\sqrt{h^2+k^2}}$$

Tomando $h=k$, $k>0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Portanto, não é verdade que $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

e $F$ não é diferenciável em $(0,0)$.