$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine se F é contínua no ponto $(0,0)$.

b) Dado um vetor $\vec{u}=(a,b)$ com $\|\vec{u}\|=1$, calcule, caso exista, a derivada direcional de F na direção de $\vec{u}$ em $(0,0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0,0).$$

c) Decida se F é diferenciável no ponto $(0,0)$. Justifique.

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, temos:

$$F(x,y)=x\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Agora: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e $0\leq \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\leq\dfrac{y^2}{y^2}=1$.

$\therefore\ 0=F(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}F(x,y) \Rightarrow F$ é contínua em $(0,0)$.

b) Para $t\neq 0$,

$$\frac{F((0,0)+t\vec{u})-F(0,0)}{t}=\frac{F(ta,tb)}{t}=\frac{t^3ab^2}{(t^2a^2+t^2b^2)\cdot t}=\frac{t^3ab^2}{t^3(a^2+b^2)}=ab^2$$

$$\therefore\ \frac{\partial F}{\partial\vec{u}}(0,0)=\lim_{t\to0}ab^2=ab^2$$

c) Sendo $\vec{u}=(1,0)$ e $\vec{v}=(0,1)$, segue do item b) que

$$0=\frac{\partial F}{\partial\vec{u}}(0,0)=\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\quad\text{e}\quad 0=\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}(0,0)=\frac{\partial F}{\partial y}(0,0).$$

<u>Suponhamos</u> que F seja diferenciável em $(0,0)$.

Então segue que, para todo versor $\vec{u}=(a,b)$

$$\frac{\partial F}{\partial\vec{u}}(0,0)=\vec{\nabla}F(0,0)\cdot\vec{u}=0.$$

Mas, pelo ítem b, $\dfrac{\partial F}{\partial\vec{u}}(0,0)\neq 0$ se a e b são ambos não nulos

$\therefore$ F não é diferenciável em $(0,0)$

Solução alternativa do ítem c. Se $(h,k) \neq (0,0)$

$$E(h,k) = F(0+h, 0+k) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \cdot h - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \cdot k$$

$$= \frac{hk^2}{h^2+k^2}$$

$$\therefore \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Tomando $h = k$ e $k > 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Portanto, não é verdade que $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

e concluímos que F não é diferenciável em $(0,0)$.