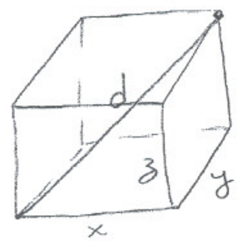
4) (2,5) Còrtando-se um arame de comprimento 100cm deseja-se obter todas as arestas de um paralepípedo reto. Determine as medidas do paralelepípedo cuja diagonal principal é mínima. Justifique a existência de solução deste problema.



d - diagonal principal

$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad 4x+4y+4z = 100$

Seja $f(x,y,z) = d^2 = x^2+y^2+z^2$.

$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0, y>0, z>0, x+y+z=25\}$

Queremos encontrar um ponto de mínimo de d em A, o que é equivalente a encontrar um ponto de mínimo de f em A.

Consideramos $\bar{A} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z=25\}$

f é contínua em $\bar{A}$ e $\bar{A}$ é compacto $\Rightarrow$ pelo Teorema de Weierstrass f admite ponto de mínimo em $\bar{A}$

Vamos procurar tal ponto de mínimo em $A\subset\bar{A}$. Podemos usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange:

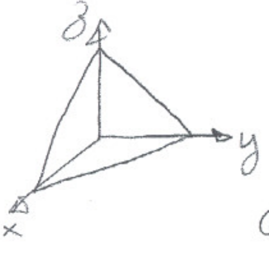
$g(x,y,z) = x+y+z \Rightarrow \nabla g(x,y,z) = (1,1,1) \neq (0,0,0)\ \forall (x,y,z)\in A$

g é de classe C^1

f é diferenciável

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x+y+z = 25 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{25}{3}$$

$$f\left(\frac{25}{3},\frac{25}{3},\frac{25}{3}\right) = \frac{625}{3} \approx 208{,}33$$



no "bordo" de $\bar{A} \Rightarrow z=0 \Rightarrow x+y=25 \Rightarrow y = 25-x,\ 0\leq x\leq 25$

$f(x,25-x,0) = x^2+625-50x+x^2 = 2x^2-50x+625 \geq 287{,}5 \ \forall x$

Os casos $y=0$ e $x=0$ são análogos

$\therefore$ O único ponto de mínimo de f em $\bar{A}$ é o ponto $P = \left(\frac{25}{3},\frac{25}{3},\frac{25}{3}\right)$

Como $P\in A\subset\bar{A} \Rightarrow$ P é um ponto de mínimo de f em A, único ponto com essa propriedade $\Rightarrow$ o problema tem solução!