3) (2,5) Seja $f(x,y,z) = zg(xy-1, x^2)$ onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g = g(u,v)$, é uma função de classe C^1. Sabendo que $\nabla g(-3,1) = (1,2)$ e que $g(-3,1) = 3$, pede-se:

a) a equação do plano tangente à superfície de nível 6 de f no ponto $(1,-2,2)$;

b) determinar a direção e sentido do vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ em que a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-2,2)$ é mínima. Qual o valor mínimo da derivada direcional no ponto $(1,-2,2)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z\frac{\partial g}{\partial u}(xy-1,x^2)\,y + z\frac{\partial g}{\partial v}(xy-1,x^2)\cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2,2) = 2\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(-3,1)\cdot(-2) + 2\frac{\partial g}{\partial v}(-3,1)\cdot 2 = -4\cdot 1 + 4\cdot 2 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z\frac{\partial g}{\partial u}(xy-1,x^2)\cdot x + z\frac{\partial g}{\partial v}(xy-1,x^2)\cdot 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2,2) = 2\frac{\partial g}{\partial u}(-3,1)\cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = g(xy-1,x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,-2,2) = g(-3,1) = 3$$

a) Eq. plano tangente à superfície de nível 6 de f no ponto $(1,-2,2)$:

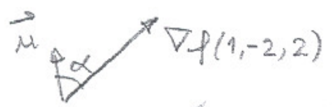
$$\nabla f(1,-2,2)\cdot(x-1,y+2,z-2) = 0 \Rightarrow (4,2,3)\cdot(x-1,y+2,z-2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4x+2y+3z=6}$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-2,2)$ é mínima quando $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f(1,-2,2)}{\|\nabla f(1,-2,2)\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{29}}(4,2,3)$

e seu valor, nesse caso, é $-\|\nabla f(1,-2,2)\| = -\sqrt{29}$

OBS: f é diferenciável em $(1,-2,2)$ $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-2,2) = \nabla f(1,-2,2)\cdot\vec{u}$



$$= \|\nabla f(1,-2,2)\|\,\underbrace{\|\vec{u}\|}_{1}\cos\alpha$$

mínimo $\Rightarrow \alpha = \pi$
$\cos\alpha = -1$