3) (2,5) Seja $f(x,y,z) = zg(y^2, xy-1)$ onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g = g(u,v)$, é uma função de classe C^1. Sabendo que $\nabla g(1,-3) = (2,1)$ e que $g(1,-3) = 3$, pede-se:

a) a equação do plano tangente à superfície de nível 6 de f no ponto $(-2,1,2)$;

b) determinar a direção e sentido do vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ em que a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-2,1,2)$ é mínima. Qual o valor mínimo da derivada direcional no ponto $(-2,1,2)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z\frac{\partial g}{\partial u}(y^2,xy-1)\cdot 0 + z\frac{\partial g}{\partial v}(y^2,xy-1)\cdot y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1,2) = 2\frac{\partial g}{\partial v}(1,-3)\cdot 1 = 2\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z\frac{\partial g}{\partial u}(y^2,xy-1)\cdot 2y + z\frac{\partial g}{\partial v}(y^2,xy-1)\cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1,2) = 2\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(1,-3)\cdot 2 + 2\frac{\partial g}{\partial v}(1,-3)(-2) = 4\cdot 2 - 4\cdot 1 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = g(y^2,xy-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(-2,1,2) = g(1,-3) = 3$$

a) Eq. plano tangente à superfície de nível 6 de f no ponto $(-2,1,2)$:

$$\nabla f(-2,1,2)\cdot(x+2, y-1, z-2) = 0$$

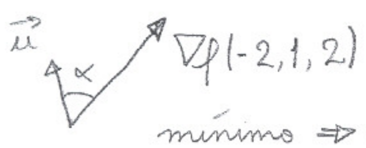
$$\Rightarrow (2,4,3)\cdot(x+2,y-1,z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{2x+4y+3z=6}$$

b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-2,1,2)$ é mínima quando $\vec{u} = -\frac{\nabla f(-2,1,2)}{\|\nabla f(-2,1,2)\|} = -\frac{1}{\sqrt{29}}(2,4,3)$

e seu valor, nesse caso, é $-\|\nabla f(-2,1,2)\| = -\sqrt{29}$

OBS: f é diferenciável em $(-2,1,2)$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-2,1,2) = \nabla f(-2,1,2)\cdot\vec{u}$

$$= \|\nabla f(-2,1,2)\|\cdot\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1}\cdot\cos\alpha$$



mínimo $\Rightarrow \alpha = \pi$

$\cos\alpha = -1$