4. (1,5) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Verifique se f é contínua em $(0,0)$ e se f é diferenciável em $(0,0)$.

$f(0,0) = 0$

f é contínua em $(0,0)$ se $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Vamos então verificar a existência (ou não) do limite.

Se $\gamma_1(t) = (t,0)$, então $\gamma_1(0) = (0,0)$ e γ_1 é contínua em $t=0$.

$f(\gamma_1(t)) = \dfrac{0}{t^2+0} = 0$ se $t \neq 0$. Logo

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = 0 = L_1$

Agora, se $\gamma_2(t) = (t^4, t)$, γ_2 também é contínua em $t=0$ e $\gamma_2(0) = (0,0)$

$f(\gamma_2(t)) = \dfrac{t^4 t^4}{2t^8} = \dfrac{1}{2} \quad \forall t \neq 0$. Logo

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \dfrac{1}{2} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$ NÃO EXISTE.

Assim f NÃO é contínua em $(0,0)$.

f NÃO é diferenciável em $(0,0)$ pois não é nem contínua em $(0,0)$!