Observação: É muito mais fácil resolver o problema sem usar multiplicadores de Lagrange! Ache o mínimo de $h(x,y) = x^2+y^2+1-x^2y^2$ em $\mathbb{R}^2$. (Por que?)

3. (2,0) Seja $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2$ e considere S a superfície de nível 1 de f. Determine o ponto de S que está mais próximo da origem.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + z^2 = 1\}$$

Queremos encontrar os pontos $(x,y,z) \in S$ tais que a distância até a origem é mínima.

$$d((x,y,z),(0,0,0)) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Para achar o mínimo da distância, basta achar o mínimo de $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ com $(x,y,z)\in S$, isto é, com $x^2y^2+z^2 = 1$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2xy^2, 2x^2y, 2z) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y,z) \in S.$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os pontos $(x,y,z)\in S$ que são soluções do problema, estão entre os pontos (x,y,z) tais que

$$\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x y^2 & (1) \\ 2y = 2\lambda x^2 y & (2) \\ 2z = 2\lambda z & (3) \\ x^2y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Da equação (3) temos que

$z - \lambda z = 0$

$z(1-\lambda) = 0$, donde

$\boxed{z=0}$ ou $\boxed{\lambda = 1}$

Se $\boxed{z=0}$:

Em (4) temos $x^2y^2 = 1$

(1) $x = \lambda x y^2 \implies x^2 = \lambda x^2 y^2 \overset{(4)}{=} \lambda$

(2) $y = \lambda x^2 y \implies y^2 = \lambda x^2 y^2 \overset{(4)}{=} \lambda$

Logo $x^2 = y^2$ e usando novamente (4) temos $x^4 = 1 \implies x = \pm 1$.

Pontos candidatos

$(\pm1, \pm1, 0)$

$(\pm1, \mp1, 0)$

$g(\pm1,\pm1,0) = g(\pm1,\mp1,0) = 2$

Se $\boxed{\lambda = 1}$

(1) $x = xy^2 \implies x(1-y^2) = 0 \implies \boxed{x=0}$ ou $\boxed{y^2 = 1}$

Se $\boxed{x=0}$, em (2), temos $y = 0$ e por (4) vem que $z = \pm 1$. Daí saem os pontos $(0,0,\pm1)$ e

$\boxed{g(0,0,\pm1) = 1}$

Se $\boxed{y^2 = 1}$ em (2) $y = x^2y \implies y^2 = x^2y^2 \implies \boxed{1 = x^2}$

Este é o caso já analisado antes!

É claro então que a distância mínima ocorre nos pontos $(0,0,\pm1)$.