2. Seja $f(x,y) = xy^2$.

a) (0,5) Dê a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, x_0y_0^2)$.

b) (1,5) Determine todos os planos que são tangentes ao gráfico de f e que passam pelos pontos $(1,1,1)$ e $(2,1,5)$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = y_0^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0y_0$

A equação do plano tangente em $(x_0, y_0, x_0y_0^2)$ é:

$$z = x_0y_0^2 + y_0^2(x - x_0) + 2x_0y_0(y - y_0)$$

$$\boxed{z = y_0^2 x + 2x_0y_0\, y - 2x_0y_0^2}$$

(b) Queremos (x_0, y_0) tal que o plano acima contenha os pontos $(1,1,1)$ e $(2,1,5)$.

Então:

$$1 = y_0^2 + 2x_0y_0 - 2x_0y_0^2 \quad (1)$$

$$5 = 2y_0^2 + 2x_0y_0 - 2x_0y_0^2 \quad (2)$$

Fazendo (2) − (1), temos

$$4 = y_0^2 \implies y_0 = \pm 2$$

Se $\boxed{y_0 = 2}$

$$1 = 4 + 4x_0 - 8x_0 \implies -4x_0 = -3 \implies \boxed{x_0 = 3/4}$$

$(3/4, 2) = (x_0, y_0)$

A equação do plano é $z = 4x + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2y - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4$

ou $\boxed{z = 4x + 3y - 6}$

Se $\boxed{y_0 = -2}$

$$1 = 4 - 4x_0 - 8x_0 \implies x_0 = 1/4 \text{ e } (x_0, y_0) = (1/4, -2$$

A equação do plano é

$$z = 4x - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2y - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4$$

ou $\boxed{z = 4x - y - 2}$