Prova de Recuperação de MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
POLI - USP - 11/02/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Nome: ______________________ Turma: ____

Assinatura: ______________________

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$.
   a) (1,5) Encontre os pontos críticos de f e classifique-os.
   b) (1,0) Determine a equação da reta tangente à curva de nível 3 de f, no ponto $(1,-1)$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - y$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$

Como f é diferenciável, os pontos críticos são os pontos tais que

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 & (1) \\ -x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) $2y = x$. Substituindo em (1), temos

$3 \cdot 4y^2 - y = 0 \Rightarrow y(12y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ou $y = 1/12$

Se $y = 0$, então $x = 2 \cdot 0 = 0$ e $(0,0)$ é um ponto crítico.

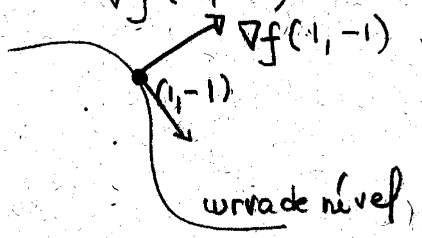
Se $y = 1/2$ então $x = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ e $(1/6, 1/12)$ é o outro ponto crítico.

Agora, $H(x,y) = \det \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 12x - 1.$

ponto crítico (x_0,y_0)	$H(x_0,y_0)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$	Conclusão
$(0,0)$	-1	irrelevante	ponto de sela
$(1/6, 1/12)$	1	$1 > 0$	ponto de mínimo local

(b) $\nabla f(x,y) = (3x^2 - y, -x + 2y)$

$\nabla f(1,-1) = (4,-3)$ Como o vetor $\nabla f(1,-1)$ é ortogonal em $(1,-1)$ à curva de nível, uma equação da reta tangente é:



$\boxed{X = (1,-1) + \lambda(3,4) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$ Eq vetorial da reta

ou $\langle \nabla f(1,-1), (x-1, y+1) \rangle = 0$, que fornece

$\langle (4,-3), (x-1, y+1) \rangle = 0 \Rightarrow 4(x-1) - 3(y+1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{4x - 3y - 7 = 0}$ eq geral da reta