MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2006

Exercício 46(a) da Lista 3

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l \quad (*)$$

onde a, b, c, d, e e l são constantes com $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f.

As derivadas parciais de f são $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + cy + d$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = cx + 2by + e$. Por hipótese, (x_0, y_0) é um extremante local de f e portanto é um ponto crítico de f, sendo assim uma solução do sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2ax + cy & = & -d \\ cx + 2by & = & -e \end{array} \right. .(S)$$

Substituindo d e e em (*) temos:

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy - (2ax_0 + cy_0)x - (cx_0 + 2by_0)y + l.(**)$$

Completando quadrados em (**) obtemos

$$f(x,y) = a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + c(x - x_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).(***)$$

Agora, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2a$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2b$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = c$ e o hessiano $H(x_0, y_0)$ é

$$H(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{bmatrix} = 4ab - c^2.$$

Observe que $H(x_0, y_0)$ é o determinante da matriz do sistema de equações lineares (S). Assim, se (x_0, y_0) for o **único** ponto crítico de f, temos que ter $H(x_0, y_0) \neq 0$.

No nosso caso, $H(x_0, y_0) \geq 0$ pois (x_0, y_0) um *extremante local* de f (se $H(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) seria um *ponto de sela* de f). Como $H(x_0, y_0) \geq 0$, vale que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (pois se $a = b = 0$, temos que ter $c \neq 0$, de onde vem que $H(x_0, y_0) = -c^2 < 0$). Suponha que $a \neq 0$ (o caso $b \neq 0$ é análogo). Completando quadrados, escrevemos a expressão (***) como

$$f(x,y) = a[((x - x_0) + \frac{c}{a}(y - y_0))^2 + \frac{H(x_0, y_0)}{a^2}(y - y_0)^2] + f(x_0, y_0).$$

Dessa útima expressão vê-se facilmente que (x_0, y_0) é um ponto de *máximo global* ou de *mínimo global* de f conforme $a < 0$ ou $a > 0$.

Usando **Álgebra Linear**, vamos agora classificar a superfície quádrica dada por

$$f(x,y) - z = 0$$

no caso em que (x_0, y_0) é o **único** ponto crítico de f.

Como já observamos, nesse caso, $H(x_0, y_0) \neq 0$.

Escreva

$$f(x,y)-z=\frac{1}{2}X^tAX+[0\ 0-1]X+f(x_0,y_0),$$

onde X é a matriz coluna $X=\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z \end{bmatrix}$, X^t é a transposta de X e

$$A=\begin{bmatrix} 2a & c & 0 \\ c & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$A'=\begin{bmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{bmatrix}$$

é uma matriz real *simétrica*. Logo existe uma matriz *ortogonal* P tal que $P^tA'P$ é diagonal. Se

$$P=\begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix},$$

então a matriz

$$Q=\begin{bmatrix} m & n & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

também é ortogonal e temos que

$$Q^tAQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A'. Escrevendo

$$X=\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z \end{bmatrix}=QX'=Q\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

temos que

$$f(x,y)-z=\frac{1}{2}(X')^t(Q^tAQ)X'+f(x_0,y_0)-[0\ 0-1]QX'=\frac{1}{2}(\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2)+f(x_0,y_0)-z,$$

observando que $z'=z$.

Note que $H(x_0,y_0)=\det A'=\lambda_1\lambda_2\neq 0$. Assim a superfície quádrica é um **parabolóide elíptico** se λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal, e é um **parabolóide hiperbólico** se λ_1 e λ_2 têm sinais contrários.

A matriz Q é matriz de uma **rotação** de $\mathbb{R}^3$ que mantém fixo o eixo z. Com isso vemos que quando (x_0,y_0) é o **único** ponto crítico de f, o gráfico de f é um parabolóide elíptico com vértice em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ se $H(x_0,y_0)>0$, e é um parabolóide hiperbólico com vértice em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ se $H(x_0,y_0)<0$.