

Fórmulas de Taylor

Notas Complementares ao Curso de Cálculo

Gláucio Terra

Sumário

1	Introdução	1
2	Notações	1
3	Notas Preliminares sobre Funções Polinomiais $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	2
4	Definição do Polinômio de Taylor	3
5	Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange	4
A	Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal	6

§1. INTRODUÇÃO

Dada uma função real a valores reais f , suposta derivável até ordem n numa vizinhança de um ponto x_0 pertencente ao seu domínio, o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é definido como sendo a (única) função polinomial de grau menor ou igual a n que tem “contato até ordem n ” com f em x_0 , i.e. que coincide com f em x_0 e cujas derivadas de ordens menores ou iguais a n coincidem com as de f em x_0 . Nestas notas, mostrar-se-á que um tal polinômio existe e é único, e que, num sentido a ser precisado, é o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0 . Os principais resultados a serem apresentados são os teoremas relativos às fórmulas de Taylor com resto de Lagrange e com resto infinitesimal; como exemplo de aplicação, mostrar-se-á como a fórmula de Taylor com resto de Lagrange pode ser usada em cálculos numéricos aproximados.

§2. NOTAÇÕES

Dados $n \in \mathbb{N}$ e f uma função real a valores reais, derivável até ordem n numa vizinhança de um ponto $x_0 \in \text{dom } f$, denotar-se-á por $f^{(k)}(x_0)$ a derivada de ordem k de f em x_0 (para $1 \leq k \leq n$). Por extensão, $f^{(0)}$ denotará a própria função f .

§3. NOTAS PRELIMINARES SOBRE FUNÇÕES POLINOMIAIS $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

PROPOSIÇÃO 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau menor ou igual a n . Então P tem derivadas de todas as ordens e $P^{(k)} \equiv 0$ para todo $k \geq n + 1$.*

Demonstração. Faça como exercício, usando o princípio da indução finita. \square

PROPOSIÇÃO 3.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau menor ou igual a n , e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:*

$$P(x) = P(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (1)$$

Demonstração. Será feita por indução sobre n .

(i) Se $n = 0$, P é uma função constante, logo $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) = P(x_0)$ e a igualdade (1) está verificada.

(ii) Seja $n_0 > 0$, e suponha que (1) seja verdadeira para toda função polinomial com grau menor ou igual a $n_0 - 1$. Seja P uma função polinomial com grau menor ou igual a n_0 ; queremos verificar que (1) vale para P .

Como P' é uma função polinomial de grau menor ou igual a $n_0 - 1$, pela hipótese de indução a igualdade (1) vale para P' , i.e. para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P'(x) &= P'(x_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{(P')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= P'(x_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{P^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \end{aligned} \quad (2)$$

Tome $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{P^{(k+1)}(x_0)}{k!} \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{P^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \end{aligned} \quad (3)$$

Então $F' = P'$; portanto, pelo teorema do valor médio, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P = F + c$. Como $F(x_0) = 0$, segue-se $c = P(x_0)$, donde $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) = P(x_0) + F(x)$, o que é equivalente a (1).

\square

COROLÁRIO 3.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, existe uma única função polinomial $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n tal que $P^{(k)}(x_0) = a_k$, para $0 \leq k \leq n$.*

Demonstração. Tome $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$. \square

§4. DEFINIÇÃO DO POLINÔMIO DE TAYLOR

Com base no corolário anterior, faz sentido a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que f é derivável até ordem $(n - 1)$ numa vizinhança de x_0 e $f^{(n-1)}$ é derivável em x_0 . Definimos o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 como sendo a (única) função polinomial de grau menor ou igual a n tal que $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, para $0 \leq k \leq n$. Ou seja, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por, para todo $x \in \mathbb{R}$:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (4)$$

Conforme será demonstrado no apêndice (vide fórmula de Taylor com resto infinitesimal), o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é, num certo sentido, o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0 . Por exemplo, para $n = 1$, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0 é a função afim cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f em x_0 , portanto esta reta é a que melhor aproxima (no referido sentido) o gráfico de f numa vizinhança de x_0 . À medida que se tomam valores de n maiores, é intuitivo esperar que a referida aproximação seja cada vez melhor.

Exemplo 4.1. (1) Seja $f = \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esta função tem derivadas de todas as ordens e $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in \mathbb{R}) \exp^{(n)}(x_0) = \exp(x_0)$. Portanto, dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, o polinômio de Taylor de ordem n de \exp em x_0 é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Em particular, para $x_0 = 0$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

é o polinômio de Taylor de ordem n de \exp em $x_0 = 0$. Os gráficos dos polinômios de Taylor de ordens 1,2,3 de \exp em $x_0 = 0$ encontram-se esboçados na figura 1.

(2) Seja $f = \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esta função tem derivadas de todas as ordens e $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in \mathbb{R}) \sin^{(4n)}(x_0) = \sin(x_0), \sin^{(4n+1)}(x_0) = \cos(x_0), \sin^{(4n+2)}(x_0) = -\sin(x_0), \sin^{(4n+3)}(x_0) = -\cos(x_0)$ (verifique, por indução sobre n). Em particular, para $x_0 = 0$, tem-se $(\forall n \in \mathbb{N}) \sin^{(2n)}(0) = 0, \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, o polinômio de Taylor de ordem $(2n + 1)$ de \sin em $x_0 = 0$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Os gráficos dos polinômios de Taylor de ordens 1,3,5 de \sin em $x_0 = 0$ encontram-se esboçados na figura 2.

(3) Seja $f = \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esta função tem derivadas de todas as ordens e $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in \mathbb{R}) \cos^{(4n)}(x_0) = \cos(x_0), \cos^{(4n+1)}(x_0) = -\sin(x_0), \cos^{(4n+2)}(x_0) = -\cos(x_0), \cos^{(4n+3)}(x_0) = \sin(x_0)$ (verifique, por indução sobre n). Em particular, para $x_0 = 0$, tem-se $(\forall n \in \mathbb{N}) \cos^{(2n+1)}(0) = 0, \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, o polinômio de Taylor de ordem $(2n)$ de \cos em $x_0 = 0$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

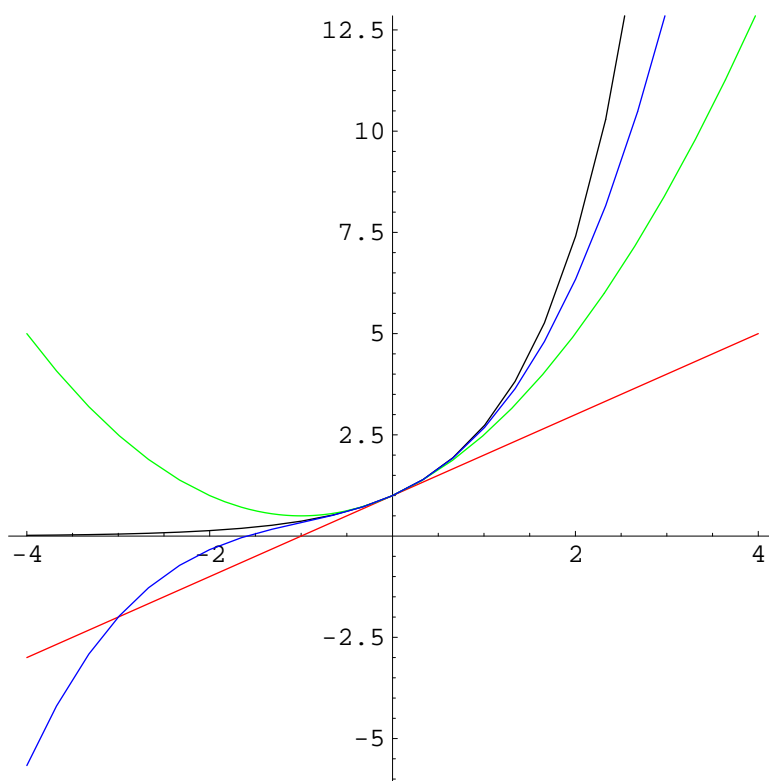


Figura 1: Gráfico de $f(x) = e^x$ e seus polinômios de Taylor de ordens 1(vermelho), 2(verde), 3(azul) em $x_0 = 0$.

§5. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

Dada uma função f definida num intervalo I , derivável até ordem $(n + 1)$, o teorema a seguir fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu polinômio de Taylor de ordem n , em termos da derivada $(n + 1)$ -ésima de f . Assim, se for possível estimar superiormente o módulo de tal derivada em I , o teorema pode ser aplicado para se obter uma estimativa superior do módulo do referido resto, o que é freqüentemente útil em cálculos aproximados.

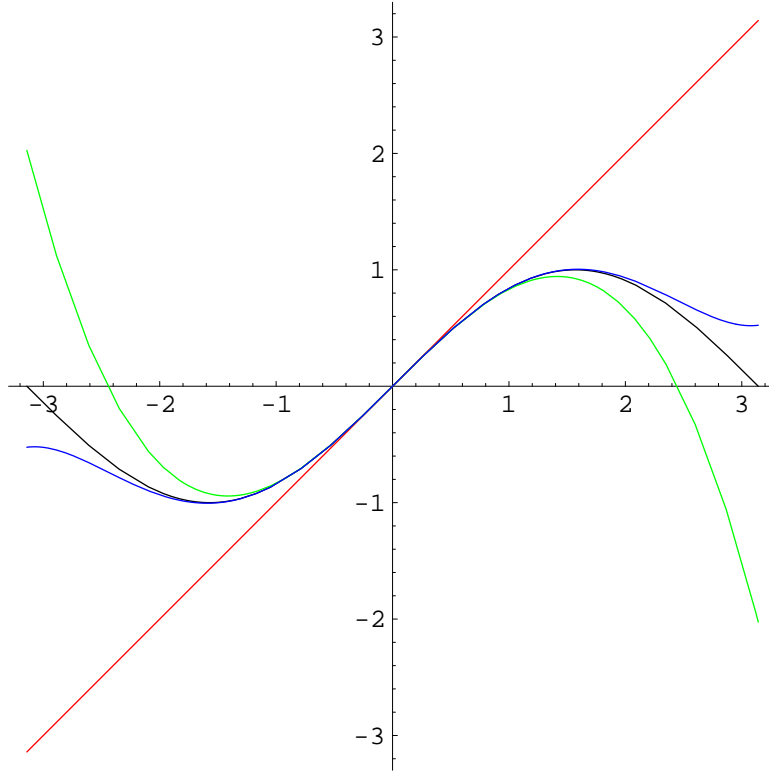


Figura 2: Gráfico de $f(x) = \sin x$ e seus polinômios de Taylor de ordens 1(vermelho), 3(verde), 5(azul) em $x_0 = 0$.

TEOREMA A (Fórmula de Taylor de ordem n , com resto de Lagrange). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem $n + 1$ ¹ e $x_0, x \in I$. Então existe c entre x_0 e x (i.e. $x_0 < c < x$ ou $x < c < x_0$) tal que:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (5)$$

Demonstração. Suponha $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o argumento é análogo). Tome $F : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\forall y \in [x_0, x]) F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k - A(x - y)^{n+1}$, onde $A \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$. Tem-se: F é contínua em $[x_0, x]$ (pois todas as derivadas de ordem menor ou igual a n de f são contínuas em I , por hipótese), derivável em $]x_0, x[$ (pois todas as derivadas de ordem menor ou igual a n de f são deriváveis no interior de I , por hipótese), e $F(x) = F(x_0) = 0$. Então, pelo teorema de Rolle, existe $c \in]x_0, x[$ tal que $F'(c) = 0$. Mas, $(\forall y \in]x_0, x[) F'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} (x - y)^{k-1} \right) + (n+1)A(x - y)^n = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x - y)^n + (n+1)A(x - y)^n$; como $c \neq x$ (pois $c \in]x_0, x[$), da última igualdade segue-se que $F'(c) = 0$ é equivalente a $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$,

¹na verdade, basta supor f derivável até ordem n , $f^{(n)}$ contínua em I e derivável no interior de I .

portanto (5) segue-se de $F(x_0) = 0$. □

Exemplo 5.1. (i) Aplicando o teorema anterior ao exemplo 4.1.1, com $x_0 = 0$, segue-se que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, 0 < |c| < |x|$ tal que:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (6)$$

Vamos usar esta última igualdade para encontrar uma aproximação racional para o número “ e ” com erro pré-fixado; digamos, encontraremos um racional r tal que $|e - r| < 5 \times 10^{-11}$. Pondo $P_n(x) \doteq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ e $R_n \doteq \exp - P_n$, segue-se de (6) que, para $x = 1$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $\exp(1) = P_n(1) + R_n(1)$. Assim, queremos encontrar n tal que $|R_n(1)| < 5 \times 10^{-11}$. Como $|R_n(1)| = \left| \frac{\exp(c)}{n!} \right| \leq \frac{3}{n!}$, basta tomarmos n tal que $\frac{3}{n!} < 5 \times 10^{-11}$, i.e. $n! > \frac{3 \times 10^{11}}{5} \Leftrightarrow n \geq 14$. Portanto, para $n = 14$, $P_{14}(1)$ é um número racional e $|\exp(1) - P_{14}(1)| < 5 \times 10^{-11}$. Truncando na décima casa decimal, $P_{14}(1) \approx 2,7182818284$.

(ii) Aplicando o teorema anterior ao exemplo 4.1.2, com $x_0 = 0$, segue-se que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, 0 < |c| < |x|$ tal que:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{\sin^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}. \quad (7)$$

Vamos usar esta última igualdade para encontrar um racional r tal que $|\sin(1) - r| < 5 \times 10^{-11}$. Pondo $P_{2n+1}(x) \doteq \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ e $R_{2n+1} \doteq \sin - P_{2n+1}$, segue-se de (7) que, para $x = 1$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $\sin(1) = P_{2n+1}(1) + R_{2n+1}(1)$. Assim, queremos encontrar n tal que $|R_n(1)| < 5 \times 10^{-11}$. Como $|R_n(1)| = \left| \frac{\sin^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$, basta tomarmos n tal que $\frac{1}{(2n+2)!} < 5 \times 10^{-11}$, i.e. $(2n+2)! > \frac{10^{11}}{5} \Leftrightarrow 2n+2 \geq 14 \Leftrightarrow n \geq 6$. Portanto, $P_{14}(1)$ é um número racional e $|\sin(1) - P_{14}(1)| < 5 \times 10^{-11}$.

§A. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INFINITESIMAL

Nos teoremas abaixo, será mostrado que, dada uma função real a valores reais f derivável até ordem n numa vizinhança de um ponto x_0 pertencente ao seu domínio, o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é a única função polinomial P , de grau menor ou igual a n , tal que o resto $R \doteq f - P$ tem a propriedade de “tender a zero mais rapidamente do que $(x - x_0)^n$ quando x tende a x_0 ” (ou seja, tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$).

É neste sentido que dissemos, na introdução, que o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0 .

PROPOSIÇÃO A.1 (Fórmula de Taylor de ordem 1, com resto infinitesimal). *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em x_0 .*

- (i) *Se f for derivável em x_0 e R_1 for a diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem 1 em x_0 , então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$;*
- (ii) *Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor ou igual a 1 e $R \doteq f - P$ satisfizer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$, então f é derivável em x_0 e P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0 .*

Demonstração. (i) Com efeito, suponha que f seja derivável em x_0 , i.e. existe $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Então, como $(\forall x \in A \setminus \{x_0\}) \frac{R_1(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$, segue-se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$.

- (ii) Reciprocamente, seja:

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a(x - x_0) + b \text{ ,}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, uma função polinomial tal que, se $R = f - P$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$. Em particular, isto implica $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$; como f é contínua, segue-se $b = f(x_0)$. Logo, $(\forall x \in A \setminus \{x_0\}) \frac{R(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a$. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$, conclui-se que f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = a$, portanto P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0 . □

TEOREMA B (Fórmula de Taylor de ordem n , com resto infinitesimal). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que f seja derivável até ordem $(n-1)$ e que $f^{(n-1)}$ seja derivável em x_0 . Então:*

- (i) *Se R_n é a diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem n em x_0 , então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$;*
- (ii) *Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor ou igual a n e $R \doteq f - P$ satisfizer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, então P é o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 .*

Demonstração. Será feita por indução sobre n .

- (1) Para $n = 1$, vide proposição anterior.

(2) Seja $k \geq 2$, e suponha que (i) e (ii) sejam verdadeiras para $n \leq k - 1$. Provemos que também serão verdadeiras para $n = k$. Com efeito:

(i) Se $(\forall x \in A) R_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$, então $R_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e $(\forall x \in A) R'_k(x) = f'(x) - \sum_{j=1}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!} (x - x_0)^{j-1} = f'(x) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$. Portanto, pela hipótese de indução, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_k(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = 0$. Assim, como $\lim_{x \rightarrow x_0} R_k(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^k = 0$, a regra de l'Hôpital implica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0$.

(ii) Suponha $(\forall x \in A) f(x) = P(x) + R(x)$, com grau $P \leq k$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0$. Isto implica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^m} = 0$, para $0 \leq m \leq k$. Sejam $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n (x - x_0)^n + a_k (x - x_0)^k$. Definamos $\tilde{P}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n (x - x_0)^n$, de forma que, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \tilde{P}(x) + a_k (x - x_0)^k + R(x). \quad (8)$$

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_k (x - x_0)^k + R(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = 0$ e grau $\tilde{P} \leq k - 1$, pela hipótese de indução conclui-se que \tilde{P} é o polinômio de Taylor de ordem $(k - 1)$ de f em x_0 , i.e. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ para $0 \leq n \leq k - 1$. Resta mostrar $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Afirimo que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \tilde{P}(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Com efeito, para cada $j \in \{0, \dots, k - 2\}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f^{(j)}(x) - \tilde{P}^{(j)}(x)] = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^j}{dx^j} [(x - x_0)^k] = \lim_{x \rightarrow x_0} k(k-1) \cdots (k-j+1)(x - x_0)^{k-j} = 0$. Como $f^{(k-1)}$ é derivável em x_0 (por hipótese) e $\tilde{P}^{(k-1)}(x) = cte. = f^{(k-1)}(x_0)$, temos $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - \tilde{P}^{(k-1)}(x)}{k!(x - x_0)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$; logo, aplicando-se $(k - 1)$ vezes a regra de l'Hôpital, prova-se a afirmação. Por outro lado, de (8) segue-se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \tilde{P}(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \rightarrow x_0} [a_k + \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k}] = a_k$; portanto, pela unicidade do limite, conclui-se $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, logo P é o polinômio de Taylor de ordem k de f em x_0 .

□