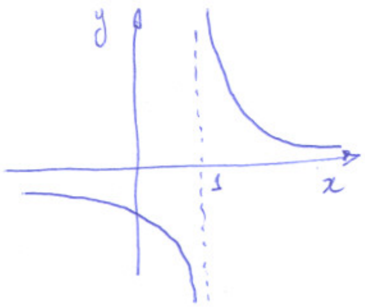
Questão A4) (Valor: 2.0) Seja $\gamma(t) = (e^t + 1\,,\, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

b) A imagem de γ está contida em alguma curva de nível da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, que nível é esse ?

a) $\begin{cases} x = e^t + 1 \\ y = e^{-t} = \dfrac{1}{e^t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^t = x - 1 \\ y = \dfrac{1}{e^t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{x-1}}$ //

Gráfico de $y = \dfrac{1}{x-1}$

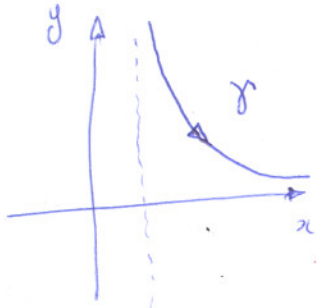


Como $x = e^t + 1 > 1$, $\forall t$

$x = e^t + 1$ é estritamente crescente

$y = e^{-t}$ é estritamente decrescente

segue que:



b) $f(\gamma(t)) = f(e^t + 1, e^{-t}) = (e^t + 1)^2 (e^{-t})^2 - 2(e^{-t}) - (e^{-t})^2 + 4$

$= (e^{2t} + 2e^t + 1)e^{-2t} - 2e^{-t} - e^{-2t} + 4$

$= 1 + 2e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-t} - e^{-2t} + 4 = 5$, $\forall t$

$\Rightarrow$ γ está contida na curva de nível 5 da função f.