$$\overset{x(t)}{\shortparallel}\qquad\overset{y(t)}{\shortparallel}$$

Questão B2) (Valor: 3.0) Seja $\gamma(t) = (-4t^2 + 2t + 2\,,\, 2t^3 - 6t)\,,\ t \in I\!R$.

a) Determine, caso existam, as intersecções da imagem de γ com os eixos Ox e Oy.

b) Determine, caso existam, os instantes t em que ocorrem as auto-intersecções da curva γ.

c) Estude o sinal das componentes do vetor velocidade γ' e determine, caso existam, os pontos da curva onde a tangente é vertical ou horizontal.

d) Estude a concavidade da imagem de γ.

e) Esboce a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

a) $-4t^2+2t+2=0 \iff t=1$ ou $t=-\frac{1}{2}$. Int. c/ Oy: $\gamma(1)=(0,-4)$, $\gamma(-\frac{1}{2})=(0,\frac{11}{4})$

$2t^3-6t=0 \iff t=0$ ou $t=-\sqrt{3}$ ou $t=\sqrt{3}$. Int c/ Ox: $\gamma(0)=(2,0)$, $\gamma(\sqrt{3})=(-10+2\sqrt{3},0)$, $\gamma(-\sqrt{3})=(-10-2\sqrt{3},0$

b) $\begin{cases} t\neq s \\ -4t^2+2t+2=-4s^2+2s+2 \\ 2t^3-6t=2s^3-6s \end{cases} \iff \begin{cases} t\neq s \\ 4(t^2-s^2)=2(t-s) \\ 2(t^3-s^3)=6(t-s) \end{cases} \iff \begin{cases} t\neq s \\ t+s=\frac{1}{2} \\ t^2+st+s^2=3 \end{cases} \Rightarrow t^2+(\frac{1}{2}-t)t+(\frac{1}{2}-t)^2=3$

$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{45}}{4} \Rightarrow s=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{45}}{4} \\ \text{ou} \\ t=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{45}}{4} \Rightarrow s=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{45}}{4} \end{cases}$

Única autointerseção:

$\gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{45}}{4}\right)=\gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{45}}{4}\right)$

c) $x'(t)=-8t+2=0 \iff t=\frac{1}{4}$

$y'(t)=6t^2-6=0 \iff t=1$ ou $t=-1$

	-1		$1/4$		1	
$+$		$+$		$-$		$-$
$+$		$-$		$-$		$+$
$\nearrow$		$\searrow$		$\swarrow$		$\nwarrow$

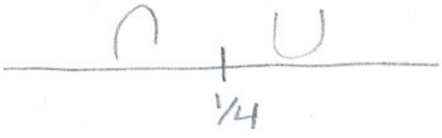
tangente horizontal: $t=1$ ou $t=-1$

tangente vertical: $t=1/4$

$\gamma(-1)=(-4,4)$, $\gamma(1/4)=(\frac{9}{4},-\frac{47}{32})$

d) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)}$. $\quad \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{d}{dt}\frac{t^2-1}{1-4t}=\frac{2t(1-4t)+4(t^2-1)}{(1-4t)^2}=\frac{-4t^2+2t-4}{(1-4t)^2}$

Como $-4t^2+2t-4<0\ \forall t\ (\Delta<0)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tem sinal contrário ao de $x'(t)$



e)