$$\overset{x(t)}{\overset{\parallel}{}}\qquad\qquad \overset{y(t)}{\overset{\parallel}{}}$$

Questão A2) (Valor: 3.0) Seja $\gamma(t) = (2t^2 - t - 1\,,\ -4t^3 + 12t\,)\ ,\ t \in \mathbb{R}$.

a) Determine, caso existam, as intersecções da imagem de γ com os eixos Ox e Oy.

b) Determine, caso existam, os instantes t em que ocorrem as auto-intersecções da curva γ.

c) Estude o sinal das componentes do vetor velocidade γ' e determine, caso existam, os pontos da curva onde a tangente é vertical ou horizontal.

d) Estude a concavidade da imagem de γ.

e) Esboce a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

a) $2t^2-t-1=0 \Leftrightarrow t=1$ ou $t=-\frac{1}{2}$. Int. c/ eixo Oy: $\gamma(1)=(0,8)$ e $\gamma(-\frac{1}{2})=(0,\frac{-11}{2})$

$-4t^3+12t=0 \Leftrightarrow t=0$ ou $t=-\sqrt{3}$ ou $t=+\sqrt{3}$. Int c/ eixo Ox: $\gamma(0)=(-1,0)$, $\gamma(\sqrt{3})=(5-\sqrt{3},0)$, $\gamma(-\sqrt{3})=(5+\sqrt{3},0)$

b) $$\begin{cases} t\neq s \\ 2t^2-t-1=2s^2-s-1 \\ -4t^3+12t=-4s^3+12s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq s \\ 2(t^2-s^2)=t-s \\ 4(t^3-s^3)=12(t-s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq s \\ t+s=\frac{1}{2} \\ t^2+st+s^2=3 \end{cases} \Rightarrow t^2+\left(\tfrac{1}{2}-t\right)t+\left(\tfrac{1}{2}-t\right)^2=3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{45}}{4} \Rightarrow s=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{45}}{4} \\ \text{ou} \\ t=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{45}}{4} \Rightarrow s=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{45}}{4} \end{cases}$$

Única autointerseção:

$$\gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{45}}{4}\right)=\gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{45}}{4}\right).$$

c) $x'(t)=4t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

$y'(t)=-12t^2+12=0 \Leftrightarrow t=1$ ou $t=-1$

		-1		$1/4$		$+1$	
x'	$-$		$-$		$+$		$+$
y'	$-$		$+$		$+$		$-$
γ'	$\swarrow$		$\nwarrow$		$\nearrow$		$\searrow$

tangente horizontal: $t=1$ ou $t=-1$

" vertical: $t=1/4$

$\gamma(-1)=(2,-8)$ $\gamma(1/4)=(-\frac{9}{8},\frac{47}{16})$

d) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)} \qquad \frac{1}{12}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\,\frac{t^2-1}{1-4t}=\frac{2t(1-4t)+4(t^2-1)}{(1-4t)^2}=\frac{-4t^2+2t-4}{(1-4t)^2}$$

Como $-4t^2+2t-4<0\ \forall t\ (\Delta<0)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tem sinal contrário ao de $x'(t)$.

$$\begin{array}{c|c} \cup & \cap \\ \hline t & 1/4 \end{array}$$

e)