Questão B3) (Valor: 3,0) Considere o seguinte problema: "Determinar os pontos do elipsóide $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ que maximizam e que minimizam a distância ao ponto $(0, -1, 1)$.

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Resolva o problema.

a) A distância entre (x, y, z) e o ponto $(0, -1, 1)$ é dada por $d(x, y, z) = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$. A função h, $h(w) = \sqrt{w}$, é estritamente crescente e, portanto, o problema é equivalente a encontrar ponto de máximo e ponto de mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$ no conjunto $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / g(x, y, z) = 1\}$, $g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2$.

Temos:
- f é contínua (pois é polinomial)
- B é conjunto compacto (pois é fechado e limitado no $\mathbb{R}^3$)

$\overset{\text{Teo}}{\Rightarrow}$ Weierstrass: f assume, em B, valor mínimo e valor máximo

Ou seja, o problema tem solução.

b) Temos f e g de classe $\mathcal{C}^1$ e $\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{2x}{4}, 2y, 2z\right) \neq \vec{0}$, $\forall (x, y, z) \in B$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os candidatos a ponto de mínimo e máximo de f em B são soluções de

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \frac{x}{2} & (1) \\ 2(y+1) = \lambda 2y & (2) \\ 2(z-1) = \lambda 2z & (3) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Note que:

$(1) \Leftrightarrow 4x = \lambda x \Leftrightarrow x(4 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\lambda = 4$

1º) Se $x = 0$, temos $\begin{cases} y + 1 = \lambda y & (2) \\ z - 1 = \lambda z & (3) \\ y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$ $\quad (3) \times y - (2) \times z \Rightarrow y = -z$. Em (4) $\Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Os candidatos aqui são $P_1\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_2\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\Rightarrow$

2º) Se $\lambda = 4$, temos $\begin{cases} y+1 = 4y & (2) \\ z-1 = 4z & (3) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow y = \frac{1}{3}$, (3) $\Rightarrow z = \frac{-1}{3}$. Em (4): $\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{2}{9}$

$\Rightarrow x^2 = 4 \cdot \frac{7}{9}$ e temos dois candidatos

$P_3 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ e $P_4 \left(-\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

· Comparação de valores:

$f(P_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 = \frac{1}{2}(6 + 4\cdot\sqrt{2})$ (< 6)

$f(P_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) = \frac{1}{2}(6 - 4\sqrt{2})$ (< 1)

$f(P_3) = f(P_4) = 4 \cdot \frac{7}{9} + \left(\frac{1}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}-1\right)^2 = \frac{60}{9}$ (> 6)

Encontramos: $f(P_2) < f(P_1) < f(P_3) = f(P_4)$ e por sabermos que o problema tem solução concluímos que: · $P = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é ponto de mínimo de f no elipsóide

· P_3 e P_4 são pontos de máximo de f no elipsóide.