Questão A3) (Valor: 3,0) Considere o seguinte problema: "Determinar os pontos do elipsóide $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ que maximizam e que minimizam a distância ao ponto $(0, 1, -1)$".

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Resolva o problema.

a) A distância entre (x,y,z) e o ponto $(0,1,-1)$ é dada por $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$. A função h, $h(w)=\sqrt{w}$, é estritamente crescente e, portanto, o problema é equivalente a

$\boxed{\text{encontrar ponto de máximo e ponto de mínimo de } f(x,y,z) = x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 \text{ no conjunto } B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / g(x,y,z) = 1\}, \text{ sendo } g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1.}$

Temos:
- f é contínua (pois é polinomial)
- B é compacto (pois é subconjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^3$)

$\xRightarrow{\text{Teorema de Weierstrass}}$ f assume, em B, valor mínimo e valor máximo

Ou seja, o problema tem solução.

b) Temos $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{2x}{4}, 2y, 2z\right) \neq \vec{0}$, $\forall (x,y,z) \in B$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange os candidatos a ponto de mínimo e a ponto de máximo de f em B são soluções de

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda\left(\frac{x}{2}\right) & (1) \\ 2(y-1) = \lambda 2(y) & (2) \\ 2(z+1) = \lambda 2z & (3) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 4x = \lambda x \Leftrightarrow x(4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\lambda = 4$

1º) Se $x = 0$, temos $\begin{cases} y - 1 = \lambda y & (2) \\ z + 1 = \lambda z & (3) \\ y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$ $(3) \times y - (2) \times z \Rightarrow y = -z$

Em (4): $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Os candidatos aqui são $P_1\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_2\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2º) Se $\lambda = 4$, temos $\begin{cases} y - 1 = 4y & (2) \\ z + 1 = 4z & (3) \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

(2) $\Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}$, (3) $\Rightarrow z = \dfrac{1}{3}$. Em (4) : $\dfrac{x^2}{4} = 1 - \dfrac{2}{9}$

$\Rightarrow x^2 = 4 \cdot \dfrac{7}{9}$ e os candidatos aqui são:

$P_3 \left(\dfrac{2\sqrt{7}}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} \right)$ e $P_4 \left(-\dfrac{2\sqrt{7}}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} \right)$

<u>Comparação de valores</u>:

$$f(P_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)^2 = \frac{1}{2}(6 - 4\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} \quad (< 1)$$

$$f(P_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)^2 = \frac{1}{2}(6 + 4\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} \quad (< 6)$$

$$f(P_3) = f(P_4) = 4 \cdot \frac{7}{9} + \left(-\frac{1}{3} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1 \right)^2 = \frac{60}{9} \quad (> 6)$$

Chegamos a: $f(P_1) < f(P_2) < f(P_3) = f(P_4)$ e por sabermos que o problema tem solução afirmamos:

- $P_1 = \left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$ é ponto de mínimo de f no elipsóide
- P_3 e P_4 são pontos de máximo no elipsóide.