Questão B2) (Valor: 4,0) Seja $f(x,y) = y^2 + y^2x - x^3 + 2x^2 - x + 1$.

a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

b) Determine os pontos de máximo e de mínimo de f sobre a região triangular R de vértices $(0,0)$, $(2,-2)$ e $(2,2)$.

a) f é diferenciável

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (y^2 - 3x^2 + 4x - 1,\ 2y + 2yx) = (0,0)$

$$\begin{cases} y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \\ 2y + 2yx = 0 \end{cases} \Rightarrow y(1+x) = 0 \Rightarrow (1)\ y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$x = \dfrac{4 \pm 2}{6} < \begin{matrix} x = 1 & (1,0) \\ x = 1/3 & (1/3, 0) \end{matrix}$

$(2)\ x = -1 \Rightarrow y^2 - 3 - 4 - 1 = 0$

$\Downarrow$

$y = \pm 2\sqrt{2}$ $\quad (-1, 2\sqrt{2})$ $\quad (-1, -2\sqrt{2})$

Pontos Críticos: $\boxed{(1,0),\ (1/3, 0),\ (-1, 2\sqrt{2})\ \text{e}\ (-1, -2\sqrt{2})}$

Classificação: f é C^2

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x+4 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{pmatrix}$$

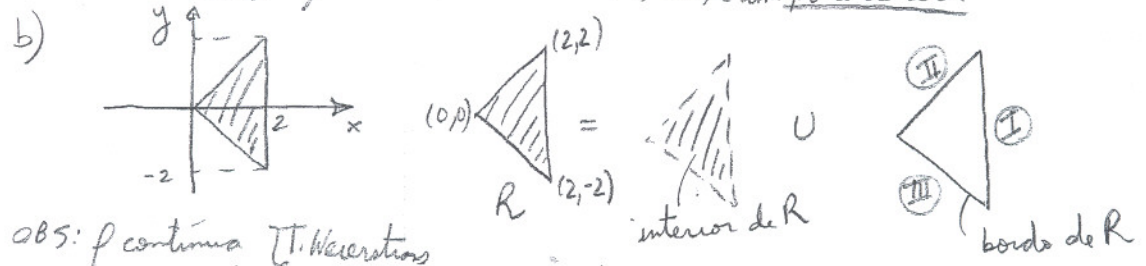
$M(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\det M(1,0) < 0 \Rightarrow (1,0)$ é um ponto de sela

$M(1/3, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \det M(1/3, 0) > 0 \\ \operatorname{tr} M(1/3, 0) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1/3, 0)$ é um ponto de mínimo local

$M(-1, 2\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 10 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\det M(-1, 2\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow (-1, 2\sqrt{2})$ é um ponto de sela

$M(-1, -2\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 10 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\det M(-1, -2\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow (-1, -2\sqrt{2})$ é um ponto de sela

b)



OBS: $\left.\begin{matrix} f \text{ contínua} \\ R \text{ compacto} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{T. Weierstrass}}$ f possui pontos de máximo e de mínimo em R

Interior de R

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

candidatos: (pelo item a)

$(1,0) \Rightarrow f(1,0) = 1$

$(1/3, 0) \Rightarrow f(1/3, 0) = 23/27$

Bordo de R

(I) $x = 2 \quad -2 \leq y \leq 2$

$g(y) = f(2,y) = 3y^2 - 1$

$g'(y) = 0 \Rightarrow y = 0$

Candidatos: $(2,-2) \Rightarrow f(2,-2) = 11$

$(2,0) \Rightarrow f(2,0) = -1$

$(2,2) \Rightarrow f(2,2) = 11$

(II) e (III) f é simétrica em y

$\left.\begin{matrix} y = x \\ y = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow h(x) = f(x,x) = 3x^2 - x + 1$

$0 \leq x \leq 2 \qquad h'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/6$

Candidatos: $(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 1$

$(2,2)$ e $(2,-2)$ como antes

$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ e $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}) \Rightarrow f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = f(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}) = 11/12$

$\therefore$ $(2,2)$ e $(2,-2)$ pontos de máximo de f em R

$(2,0)$ ponto de mínimo de f em R