Questão A2) (Valor: 4,0) Seja $f(x,y) = x^2 + x^2y - y^3 + 2y^2 - y + 1$.

a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

b) Determine os pontos de máximo e de mínimo de f sobre a região triangular R de vértices $(0,0)$, $(-2,2)$ e $(2,2)$.

a) f é diferenciável

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (2x + 2xy,\ x^2 - 3y^2 + 4y - 1) = (0,0)$

$\begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ x^2 - 3y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x(1+y) = 0$

(1) $x = 0 \Rightarrow 3y^2 - 4y + 1 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm 2}{6} < \begin{matrix} y = 1 \\ y = 1/3 \end{matrix}$

$(0,1)$ e $(0,1/3)$

(2) $y = -1 \Rightarrow x^2 - 3 - 4 - 1 = 0$

$\Downarrow$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

$(2\sqrt{2}, -1)$

$(-2\sqrt{2}, -1)$

Pontos Críticos: $\boxed{(0,1), (0,1/3), (2\sqrt{2},-1) \text{ e } (-2\sqrt{2},-1)}$

Classificação: f é C^2

$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & -6y+4 \end{pmatrix}$

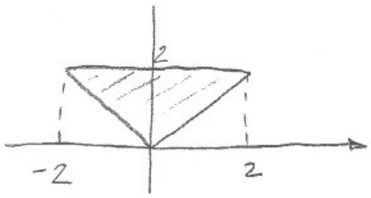
$M(0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det M(0,1) < 0 \Rightarrow (0,1)$ é um <u>ponto de sela</u>

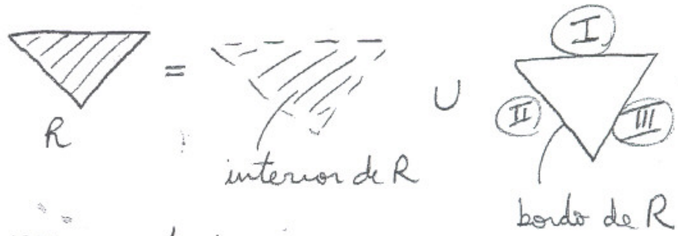
$M(0,1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \det M(0,1/3) > 0 \\ \operatorname{tr} M(0,1/3) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0,1/3)$ é um <u>ponto de mínimo local</u>

$M(2\sqrt{2},-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 10 \end{pmatrix}$ $\det M(2\sqrt{2},-1) < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2},-1)$ é um <u>ponto de sela</u>

$M(-2\sqrt{2},-1) = \begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 10 \end{pmatrix}$ $\det M(-2\sqrt{2},-1) < 0 \Rightarrow (-2\sqrt{2},-1)$ é um <u>ponto de sela</u>

b)





OBS: $\left.\begin{matrix} f \text{ contínua} \\ R \text{ compacto} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{T. Weierstrass}}$ f possui ponto de máximo e de mínimo em R

<u>Interior de R</u>

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

Candidatos: (pelo item a)

$(0,1) \Rightarrow f(0,1) = 1$

$(0,1/3) \Rightarrow f(0,1/3) = 23/27$

<u>Bordo de R</u>

I $y = 2 \quad -2 \leq x \leq 2$

$g(x) = f(x,2) = 3x^2 - 1$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Candidatos: $(-2,2) \Rightarrow f(-2,2) = 11$

$(0,2) \Rightarrow f(0,2) = -1$

$(2,2) \Rightarrow f(2,2) = 11$

II e III f é simétrica em x

$\left.\begin{matrix} y = x \\ y = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow h(y) = f(y,y) = 3y^2 - y + 1$

$h'(y) = 0 \Rightarrow y = 1/6$

Candidatos: $(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 1$

$(2,2)$ e $(-2,2)$ como antes

$(-1/6, 1/6)$ e $(1/6, 1/6) \Rightarrow f(-1/6, 1/6) = f(1/6, 1/6) = 11/12$

$\therefore$ $(-2,2)$ e $(2,2)$ pontos de máximo de f em R

$(0,2)$ ponto de mínimo de f em R