

MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2º semestre de 2007 - 3ª PROVA - 03/12/2007

Questão B1) (Valor: 3,0) Considere a superfície S dada por $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3$.

a) Determine a equação do plano tangente à superfície S no ponto (x_0, y_0, z_0) de coordenadas estritamente positivas.

b) Mostre que a soma das coordenadas dos vértices do tetraedro formado pelo plano do item (a) e pelos planos coordenados independe do ponto de tangência.

a) Sejam $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0, y > 0, z > 0\}$
 f é diferenciável em D

Se $(x_0, y_0, z_0) \in D$, então o plano tangente à superfície de nível 3

de f em (x_0, y_0, z_0) é dado por:

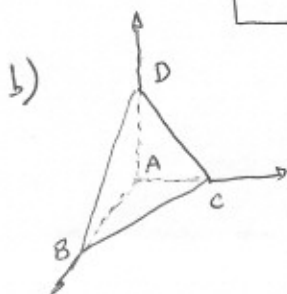
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0, \text{ onde } \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \right) (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} x + \frac{1}{\sqrt{y_0}} y + \frac{1}{\sqrt{z_0}} z - \frac{x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} - \frac{z_0}{\sqrt{z_0}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}} x + \frac{1}{\sqrt{y_0}} y + \frac{1}{\sqrt{z_0}} z = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}$$

$$\boxed{\pi: \frac{1}{\sqrt{x_0}} x + \frac{1}{\sqrt{y_0}} y + \frac{1}{\sqrt{z_0}} z = 3}$$



$$A = (0, 0, 0), B = (x_1, 0, 0), C = (0, y_1, 0), D = (0, 0, z_1)$$

$$B \in \pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}} x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 3\sqrt{x_0}$$

$$C \in \pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y_0}} y_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 3\sqrt{y_0}$$

$$D \in \pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{z_0}} z_1 = 3 \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{z_0}$$

$$\Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 3(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = 3 \cdot 3 = 9$$