MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2º semestre de 2007 - 3ª PROVA - 03/12/2007

Questão A1) (Valor: 3,0) Considere a superfície S dada por $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$.

a) Determine a equação do plano tangente à superfície S no ponto (x_0,y_0,z_0) de coordenadas estritamente positivas.

b) Mostre que a soma das coordenadas dos vértices do tetraedro formado pelo plano do item (a) e pelos planos coordenados independe do ponto de tangência.

a) Sejam $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ e $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x>0, y>0, z>0\}$

f é diferenciável em D.

Se $(x_0,y_0,z_0)\in D$, então o plano tangente à superfície de nível 2 de f em (x_0,y_0,z_0) é dado por:

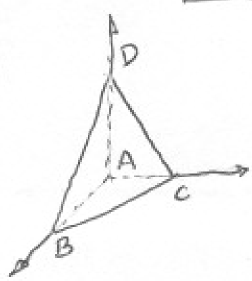
$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0, \quad \text{onde } \nabla f(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z-\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}-\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}-\frac{z_0}{\sqrt{z_0}}\right]=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}$$

$$\boxed{\Pi: \frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=2}$$

b) 

$A=(0,0,0),\ B=(x_1,0,0),\ C=(0,y_1,0),\ D=(0,0,z_1)$

$B\in\Pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x_1=2 \Rightarrow x_1=2\sqrt{x_0}$

$C\in\Pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y_0}}y_1=2 \Rightarrow y_1=2\sqrt{y_0}$

$D\in\Pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{z_0}}z_1=2 \Rightarrow z_1=2\sqrt{z_0}$

$\Rightarrow x_1+y_1+z_1=2(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=2.2=4$