MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2007

Exercício 3(c) da Lista 1

Seja $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$. Verifique se γ tem auto-intersecção. Estude $\gamma'(t)$ e a concavidade de γ. Esboce a trajetória de γ.

1. **Verificar se γ tem auto-intersecção.**
Suponha que existam $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \neq s$ e com $\gamma(t) = \gamma(s)$. Então

$$t^4 - 2t^3 - 2t^2 = s^4 - 2s^3 - 2s^2 \qquad (1)$$

e

$$t^3 - 3t = s^3 - 3s. \qquad (2)$$

Usando que $t \neq s$, temos de (2) que

$$t^2 + ts + s^2 = 3 \qquad (3)$$

e de (1) e (3) temos que

$$(t^2 + s^2)(t + s) - 2(t + s) = 6. \qquad (5)$$

É claro que $t^2 + s^2 = (t + s)^2 - 2ts$. Substituindo em (3) e em (5), temos

$$(t + s)^2 - ts = 3 \qquad (6)$$

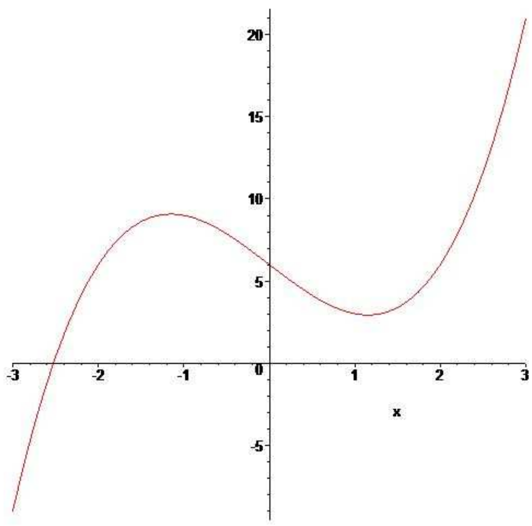
e

$$(1 - ts)(t + s) = 6. \qquad (7)$$

Faça agora $u = t + s$ e $v = ts$. As equações (6) e (7) ficam $(1 - v)u = 6$ e $u^2 - v = 3$, de onde vem que

$$u^3 - 4u + 6 = 0. \qquad (8)$$

Usando Cálculo I, estudamos a função $f(x) = x^3 - 4x + 6$. Sua derivada $f'(x) = 3x^2 - 4$, tem duas raízes $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Esboce o gráfico de f. Observe que $-2 < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $f(-2) = 6$. O ponto $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ é ponto de mínimo local de f e $f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{16}{3\sqrt{3}} + \frac{18\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} > 0$. Assim, com certeza, f só tem uma raiz real e esta é menor do que -2. Veja o gráfico de f.



Desta análise vemos que há apenas um valor de u que satsfaz (8) e este é **menor do que** -2. Por outro lado, como $u = t + s$ e $v = ts$, a equação do segundo grau $x^2 - ux + v = (x - t)(x - s) = 0$ tem que ter $\Delta = u^2 - 4v > 0$ já que $t, s \in \mathbb{R}$ e $t \neq s$. Assim, $u^2 - 4v > 0$ junto com $v = u^2 - 3$ implica que $u^2 - 4 < 0$, e dái $|u| < 2$, uma contradição com (8). Assim γ **não** tem auto-intersecção!

2. **Estudar o vetor** $\gamma'(t)$.

   Aqui $x(t) = t^4 - 2t^3 - 2t$ e $y(t) = 3t^2 - 3t$. Logo $x'(t) = 4t^3 - 6t^2 - 2t = 4t(t + \frac{1}{2})(t + 2)$ e $y'(t) = 3(t^2 - 1)$. Analisando os sinais de x' e y', obtemos a tabela seguinte:

		-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
x'	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
x	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$
y'	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
γ	$\nwarrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$

   Em $t = -\frac{1}{2}, 0, 2$ a reta tangente à trajetória de γ é vertical e em $t = \pm 1$ a reta tangente é horizontal.

3. **Estudar a concavidade da imagem de** γ.

   Nos pontos em que a reta tangente à trajetória de γ não é vertical (isto é, nos instantes t em que $x'(t) \neq 0$) o coeficiente angular da reta tangente é

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

   Estudando o sinal de

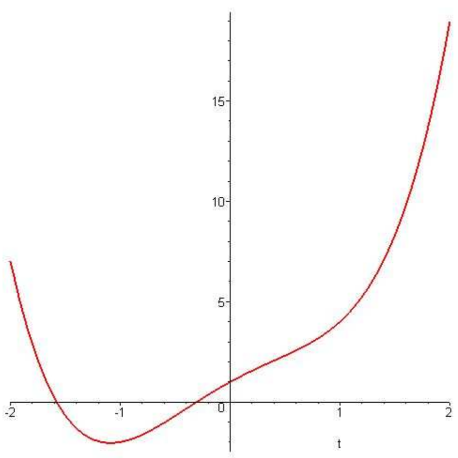
$$\frac{m'(t)}{x'(t)}$$

   obtemos os intervalos em que a imagem de γ é côncava para cima e para baixo.

   Fazendo as contas, temos que

$$\frac{m'(t)}{x'(t)} = -\frac{3}{2}\left(\frac{t^4 - t^2 + 3t + 1}{(x'(t))^3}\right).$$

   O gráfico da expressão no numerador é:



Observação: Tente usar Cálculo para estimar as raízes de $t^4 - t^2 + 3t + 1 = 0$ e esboçar o gráfico acima!

Uma das raízes da expressão no numerador é $a \approx -0,3$ e a outra $b \approx -1,6$. Assim, o sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$ é:

	b	$-\frac{1}{2}$	a	0	2
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

4. **Esboço da trajetória de γ.**

Temos que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty$ e $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$. Temos também que:

t	$\gamma(t)$
-1	$(1,2)$
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{3}{16}, -\frac{11}{8})$
0	$(0,0)$
1	$(-3,-2)$
2	$(-8,2)$

Finalmente, esboce a trajetória de γ!