3. (2,5) O gradiente de $f(x,y) = x^4 + y^2$ é tangente à imagem da curva

$$\gamma(t) = (t, t^2), t > 0,$$

em um ponto $P = (x_0, y_0) = \gamma(t_0)$.

(a) Determine o ponto P.

(b) Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

(a) $\nabla f(x,y) = (4x^3, 2y)$. Seja $P = \gamma(t_0)$. Então,

$\nabla f(\gamma(t_0)) = (4t_0^3, 2t_0^2)$ e este vetor tangencia a Im γ em P.

Logo $P = \gamma(t_0)$ é tal que $\gamma'(t_0)$ é paralelo a

$\nabla f(\gamma(t_0))$ e $\gamma'(t_0) = (1, 2t_0) \neq \vec{0}$.

Assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda \gamma'(t_0).$$

Portanto

$(4t_0^3, 2t_0^2) = \lambda(1, 2t_0)$, de onde vem que:

$4t_0^3 = \lambda$ e $2t_0^2 = 2\lambda t_0$, e então

$2t_0^2 = 2(4t_0^3)t_0$ ou $t_0^2 = 4t_0^4$,

de onde vem que $t_0 = 0, \pm 1/2$. Como $t_0 > 0$,

$$\boxed{P = \gamma(1/2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}.$$

(b) $\nabla f(P) = \left(4\left(\frac{1}{2}\right)^3, 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq \vec{0}$

Como f é diferenciável em P e $\nabla f(P) \neq \vec{0}$, ele é ortogonal em P à curva de nível de f que contém P.

Logo uma equação vetorial para a reta tangente é: $\boxed{X = (1/2, 1/4) + \lambda(1, -1), \lambda \in \mathbb{R}}$