3. (2,5) O gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva

$$\gamma(t) = (t^2, t), t > 0,$$

em um ponto $P = (x_0, y_0) = \gamma(t_0)$.

(a) Determine o ponto P.

(b) Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

(a) $\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3)$. Como $\nabla f(x_0,y_0) = \nabla f(\gamma(t_0))$ tangencia a $\operatorname{Im} \gamma$ em $P = \gamma(t_0)$, o vetor $\nabla f(\gamma(t_0))$ é paralelo a $\gamma'(t_0)$.

Como $\gamma'(t_0) = (2t_0, 1) \neq \vec{0}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda(2t_0, 1)$, ou seja,

$(2t_0^2, 4t_0^3) = \lambda(2t_0, 1)$, de onde temos que

$2t_0^2 = 2\lambda t_0$ e $4t_0^3 = \lambda$ e portanto

$2t_0^2 = 8t_0^4 \implies t_0 = 0, \pm 1/2$. Como $t_0 > 0$, temos que ter $t_0 = 1/2$.

Logo $\boxed{P = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1/4, \frac{1}{2}\right)}$.

(b) $\nabla f(P) = \left(2\left(\frac{1}{4}\right), 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq \vec{0}$

e função f é diferenciável em P. Logo $\nabla f(P)$ é ortogonal em P à curva de nível de f que contém P.

Logo, uma equação vetorial para a reta tangente é

$\boxed{X = (1/4, 1/2) + \lambda(-1, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$.