2. (2,0) Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de **ambas** as curvas

$$\gamma(t) = \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\sigma(u) = \left(u+1, u, u+2+\frac{1}{u}\right), u \in \mathbb{R}, u \neq 0.$$

(a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(b) Determine $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

a) $\gamma(-1) = (1/2, -1/2, -1/2)$ e $\sigma(-1/2) = (1/2, -1/2, -1/2)$

Como $Im(\gamma)$ e $Im(\sigma)$ estão contidas em $Graf(f)$, sabemos que os vetores $\gamma'(-1)$ e $\sigma'(-1/2)$ são, ambos, paralelos ao plano tangente ao gráfico no ponto $(+1/2, -1/2, 1/2)$.

$\gamma'(t) = (-1/2, 1/2, 1/2) \Rightarrow \gamma'(-1) = (+1/2, 1/2, 1/2)$.

$\sigma'(u) = (1, 1, 1-\frac{1}{u^2}) \Rightarrow \sigma'(-1/2) = (1, 1, -3)$.

$$\gamma'(-1) \wedge \sigma'(-1/2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, -1, -1)$$

é vetor normal ao plano tangente

PLANO TANGENTE:

$2(x - 1/2) + 1(y + 1/2) + 1(z + 1/2) = 0$

$\boxed{2x + y + z = 0}$

b) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1/2, -1/2), \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, -1/2), -1\right) \parallel (-2, -1, -1)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, -1/2) = -2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, -1/2) = -1$

Como f é diferenciável em $(1/2, -1/2)$, temos:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1/2, 1/2) = \nabla f(1/2, -1/2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-2, -1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}$