MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
3ª lista de exercícios - 2007

1. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

2. a) Mostre que toda reta normal a uma esfera passa pelo seu centro.

   b) Mostre que o plano tangente à superfície $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ no ponto (x_0, y_0, z_0) tem como equação $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$.

   c) Mostre que todos os planos tangentes ao cone $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ passam pela origem.

3. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

4. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a,\ a \neq 0$ e que seja paralelo ao plano $x + y + z + 100 = 0$

5. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

6. Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.

7. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

   (Sugestão: Use vetores normais.)

8. Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

9. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

10. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} - (z-1)^2 = 0$ nos pontos $(2, 2, 2)$ e $(2, 2, 0)$.

11. São dados o cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ e a família de esferas $x^2 + y^2 + (z - 2\alpha)^2 = \alpha^2$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

    a) Esboce o cone e algumas esferas da família.

    b) Mostre que essas superfícies são tangentes em seus pontos de intersecção, isto é, elas têm o mesmo plano tangente nesses pontos.

12. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    a) $f(x, y) = xe^z + \text{sen}\,(y),\ (2, 0, 0)$ b) $f(x, y, z) = -\dfrac{4}{y} + z\ln(x),\ (1, 2, -1)$

13. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

(c) Qual é a maior taxa de variação em P?

14. Seja $f(x,y) = \ln\,(x+y)$.

a) Determine o polinômio de Taylor de ordem um de f em torno de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) Mostre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $x+y > 1$, tem-se

$$|\ln(x+y) - (x+y-1)| < \tfrac{1}{2}(x+y-1)^2$$

15. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto dado:

a) $f(x,y) = e^{x+5y}, \qquad P = (0,0)$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y, \qquad P = (1,1)$

c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x+4y), \qquad P = (0,0)$

16. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$

b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$

c) $z = x^2y^2$

d) $z = x^3y^3$

e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

f) $z = y\cos x$

g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$

h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$

i) $z = xye^{-x^2-y^2}$

j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

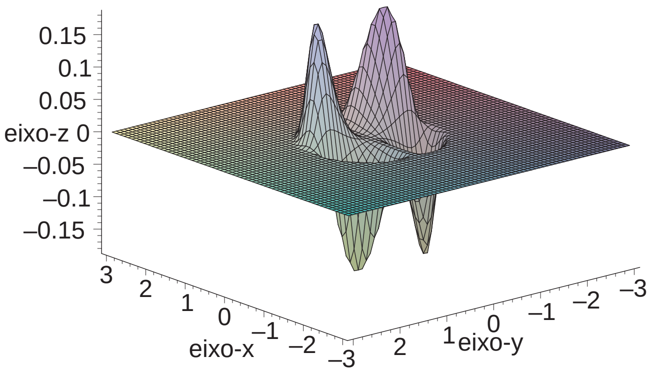
k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$

17. A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x,y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$.

a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.

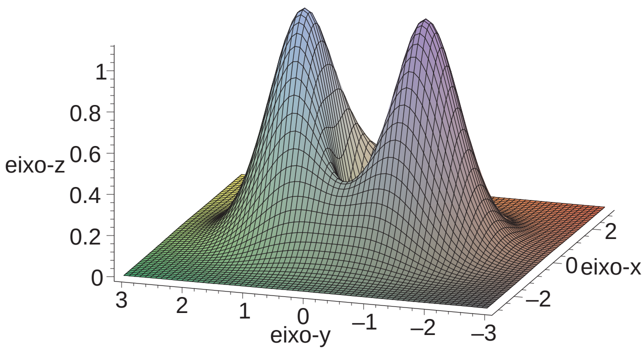
b) Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.

c) Classifique os demais pontos críticos.



18. Seja f uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Supondo que (0,0) é ponto crítico de f e que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \geq 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq 0$, prove que $(0,0)$ é ponto de mínimo global de f.

19. A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de f.



20. Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;

b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.

Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?

Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

21. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

22. Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, polinomial, que só tenha um ponto crítico e este ponto seja mínimo local sem ser mínimo global? Analise a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$. Você é capaz de esboçar o gráfico?

23. Determine o máximo e o mínimo valores da função f sujeita às restrições explicitadas:

a) $f(x,y) = xy; \quad 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

b) $f(x,y,z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

24. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)

a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2,\ x \le 0, \ \ y \ge 0\}$

c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

d) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3, \ \ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

25. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

a) $f(x,y) = xy; \quad D = \{(x,y) \ : \ x^2 - y^2 = 1, \quad x \in [1,2]\}$

b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4; \quad D = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 = 1, \quad x \in [0,1/4], \ y \geq 0\}$

Você pode usar multiplicadores de Lagrange para resolver esse exercício?

26. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

27. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

28. Determine a distância entre as retas de equação

$X = (-2,3,-1) + \alpha(4,1,5), \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad X = (-1,0,3) + \mu(-2,3,1), \quad \mu \in \mathbb{R}$

29. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine aquele que tem área máxima.

30. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

31. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma$.

32. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

33. Seja $T(x,y) = \dfrac{4}{x^2+y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x,y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq -x+1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima?

34. Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x,y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

35. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

36. Seja $f(x,y) = k(x^2+y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.

(a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

(b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

37. A temperatura num ponto (x,y,z) do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

38. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

39. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobre, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

40. Considere o seguinte problema: "Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$".

    a) Mostre que o problema tem solução.

    b) Resolva o problema.

41. (a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f. (Dica: dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.)

    (b) (Método dos Mínimos Quadrados). Sejam $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ pontos do $\mathbb{R}^2$ $(n \geq 3)$. Considere a função $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(xa_i + y - b_i)^2$. Prove que a função E tem um único ponto de mínimo global (x_0, y_0). Qual a relação entre a reta $f(x) = x_0x + y_0$ e os pontos $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$?

RESPOSTAS

1. $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

4. $x + y + z - 3\sqrt[3]{a} = 0$.

7. $(5, 8, 6)$.

8. $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

9. $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.

10. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$

12. a) $\sqrt{6}$; $(1, 1, 2)$ b) $\sqrt{2}$; $(-1, 1, 0)$.

13. a) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38, 6, 12)$ c) $2\sqrt{406}$.

14. a) $x + y - 1$

15. a) $1 + x + 5y$ b) $5 + (x - 1) + 7(y - 1)$ c) $3x + 4y$

16. a) $(-3, 2)$ mínimo; b) $(2/3, 1)$, $(-4/3, -1)$ selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(4, 4)$ máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$ selas; h) $(0, 0)$ máximo, $(0, 2)$ mínimo, $(0, -2), (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)$ selas; i) $(0, 0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3, 0)$ mínimo; k) $(2, 1)$ e $(0, 3)$ sela; $(2, 3)$ mínimo e $(0, 1)$ máximo.

17. a) $(a,0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2}\cdot 6^{-3/8}), \pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2}\cdot 6^{-3/8})$.

19. mínimo $f(0,0)=0$; máximo $f(0,\pm 1) = 3\mathrm{e}^{-1}$

20. a) $a>0$ b) $a<0$ c) não d) $a=0$.

23. a) máx $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; mín $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$; b) máx $2/\sqrt{3}$, mín $-2/\sqrt{3}$; c) máx $1/27$, mín 0; d) máx $f(1,\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2}$, mín $f(1,-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1-2\sqrt{2}$; e) máx $\sqrt{3}$, mín 1; f) máx $3/2$, mín $1/2$.

24. a) máximo: $f(4,5)=13$, mínimo: $f(4,0)=-7$; b) máximo: $f(0,0)=0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$; c) máximo: $f(1,0)=2$, mínimo: $f(-1,0)=-2$; d) máximo: $f(2,0)=4$, mínimo: $f(3,-\frac{\pi}{4}) = f(3,\frac{\pi}{4}) = f(1,\frac{-\pi}{4}) = f(1,\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

25. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.

26. $(0,-1,2)$.

27. $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.

28. $\sqrt{12}$.

29. $12(2-\sqrt{3}),\ 2(3-\sqrt{3}),\ 4(2\sqrt{3}-3)$

30. $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$.

31. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

32. $x+y+2z-6=0$

33. ponto de máximo $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; não há ponto de mínimo.

34. a) Se $b>0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1\right)$ e $(0,-2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ máx. local e $(0,2)$ mín. local; e se $b<0$, temos 3 pontos críticos: $(0,0)$ e $(0,2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ mín. local.

b) Pontos de máx: $(-3,3)$ e $(3,3)$; ponto de mín. $(0,2)$.

35. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
$2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.

36. b) $k>1$: mínimo local; $-1<k<1$: sela; $k<-1$: máximo local; $k\geq 1$: $(0,0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0,0)$ é ponto de máximo global.

37. Mais quentes: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$; Mais frios : $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$.

38. base 3×3cm, altura 1,5cm.

39. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.