

# MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2007

## 2ª lista de exercícios

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

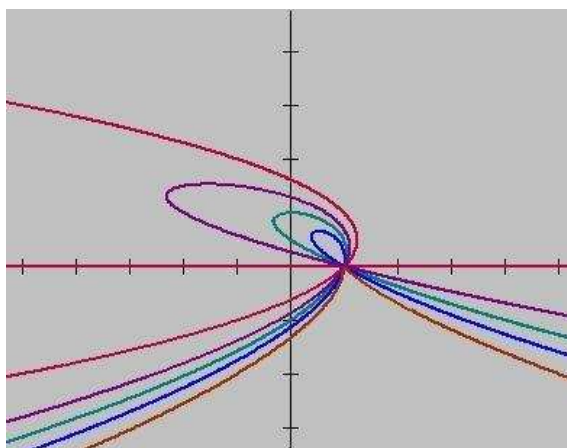
<p>(a) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}</math></p> <p>(b) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}</math></p> <p>(c) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}</math></p> <p>(d) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{2x^4 + x^2y + y^2}</math></p> <p>(e) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}</math></p>	<p>(f) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}</math></p> <p>(g) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}</math></p> <p>(h) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \text{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}</math></p> <p>(i) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}</math></p> <p>(j) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{sen} \left( \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)</math></p>
---	--

2. Calcule os seguintes limites:

<p>(a) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}</math></p>	<p>(b) <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)</math></p>
--	---

3. O domínio de uma função  $f$  é o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (1, 0)\}$ . A figura abaixo mostra as curvas de nível de  $f$  nos níveis  $k = 0$ ,  $k = 0,3$ ,  $k = 0,5$ ,  $k = 0,7$  e  $k = 1$ .

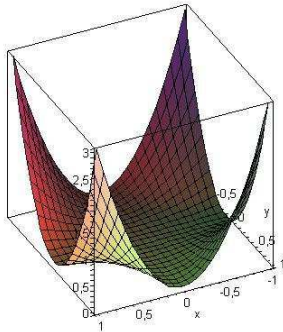
Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ ? Justifique.



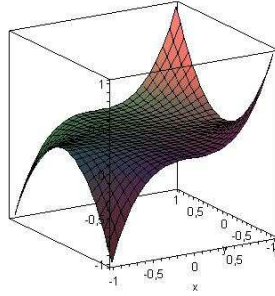
4. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x - 1)^2}{(x^2 + y^2)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2]} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (x, y) \neq (1, 1), \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

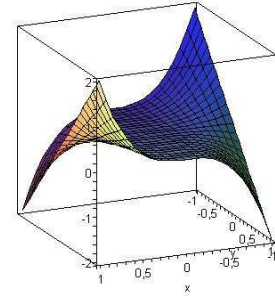
5. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função  $f$  e de suas derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Identifique cada superfície e justifique sua escolha.



(a)



(b)



(c)

6. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a)  $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$     (b)  $f(x, y, z, t) = \frac{x - y}{z - t}$

7. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

(a)  $u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$     (b)  $u(x, y) = f(ax + by)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes.

8. Dada a função  $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2y)}$ , ache  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ .

[**Sugestão:** Dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação.]

9. Verifique que a função  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

10. Verifique que a função  $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$  é solução da equação de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

11. Sejam  $f$  e  $g$  funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , deriváveis até 2ª ordem.

(a) Mostre que  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$  satisfaz a equação  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

(b) Mostre que  $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$  é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

12. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existem em todos os pontos.

(b)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ ?

(c)  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ?

13. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

(b) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

(c) É  $f$  diferenciável em  $(0, 0)$ ?

(d) São  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas em  $(0, 0)$ ?

14. Considere  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

(b) As derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $(0, 0)$ ?

15. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \text{sen}((x^2 + y^2)^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Verifique que  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

(b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(c) A função  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua em  $(0, 0)$ ? Justifique sua resposta.

(d) A função  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ? Justifique sua resposta.

16. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (a) Verifique que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$  para todo  $y$ , e que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$ , para todo  $x$ .
- (b) Verifique que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$  e que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ .
17. Seja  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ . Determine o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$  onde  $f$  **não** é diferenciável.
18. Sejam  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$  e  $g(x, y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$ . Mostre que  $f$  e  $g$  são de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\mathbb{R}^2$ .
19. Seja  $f(x, y) = |xy|$ . Mostre que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ . Em que pontos de  $\mathbb{R}^2$  a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  não existe? E  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ? Observe que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$  embora **não** exista nenhum disco aberto  $D$  contendo a origem tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  existam em todos os pontos  $(x, y) \in D$ .
20. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gradiente é dado por:  $\nabla f(x, y) = (x^2 y, y^2), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
21. Calcule  $\frac{\partial w}{\partial t}$  e  $\frac{\partial w}{\partial u}$  pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.
- (a)  $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$ .
- (b)  $w = \frac{x}{x^2 + y^2}; x = t \cos u, y = t \sin u$ .
- (c)  $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2$ .
22. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?
23. Um carro  $A$  está viajando para o norte a 90km/h e um carro  $B$  está viajando para o oeste a 80km/h. O carro  $A$  está se aproximando e o carro  $B$  está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro  $A$  está a 0,3km da intersecção e o carro  $B$  a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?
24. Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , com  $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$  e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine  $a$  para que a reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta  $y = 2x + 3$ .

25. Seja  $f(x, y)$  uma função de classe  $\mathcal{C}^2$  e sejam  $a, b, c, d$  constantes tais que  $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$  e  $ac + bd = 0$ . Seja  $g(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$ . Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au + bv, cu + dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au + bv, cu + dv).$$

26. (a) Seja  $v(r, s)$  uma função de classe  $\mathcal{C}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e defina  $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$ , onde  $c$  é constante. Verifique que:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = w(x + ct, x - ct),$$

onde  $w(r, s) = -4c^2 v_{rs}(r, s)$ .

- \*(b) Mostre que se  $u(x, t)$  é uma solução da equação  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  então existem funções  $F$  e  $G$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  tais que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

[\***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 11 (a).]

27. Seja  $u = u(x, y)$  função de classe  $\mathcal{C}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e defina  $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \Delta u(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

onde, por definição,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ .

28. Seja  $f = f(x, y)$  função de classe  $\mathcal{C}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $u(s, t) = f(e^s \cos t, e^s \sin t)$ , mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right].$$

29. Uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é **homogênea de grau**  $\lambda$  se satisfaz

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \text{ para todo } t > 0 \text{ e } (x, y) \in \mathcal{D}_f \quad (H)$$

onde  $\lambda$  é um número real fixado. Suponha que  $f$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^2$  que é homogênea de grau  $\lambda$ . Prove que:

- (a)  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y);$
- (b)  $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \lambda(\lambda - 1)f(x, y);$
- (c) As funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são homogêneas de grau  $\lambda - 1$ .
- (d) Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:
- (i)  $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - y^2$     (ii)  $f(x, y) = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$
- (iii)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}.$

**[Sugestões:**

- (a) Derive  $(H)$  em relação a  $t$  e faça  $t = 1$ .
- (b) Derive  $(H)$  duas vezes em relação a  $t$  e faça  $t = 1$ .
- (c) Derive  $(H)$  em relação a  $x$  e em relação a  $y$ .]

30. Seja  $F(r, s) = G(e^{rs}, r^3 \cos(s))$ , onde  $G = G(x, y)$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Calcule  $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, s)$  em função das derivadas parciais de  $G$ .
- (b) Determine  $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1, 0)$  sabendo que  $\frac{\partial G}{\partial y}(t^2 + 1, t + 1) = t^2 - 2t + 3$ .

31. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

- (a)  $z = e^{x^2+y^2}$  no ponto  $(0, 0, 1)$ ,
- (b)  $z = \ln(2x + y)$  no ponto  $(-1, 3, 0)$ ,
- (c)  $z = x^2 - y^2$  no ponto  $(-3, -2, 5)$ ,
- (d)  $z = e^x \ln y$  no ponto  $(3, 1, 0)$ .

32. Determine o plano que passa por  $(1, 1, 2)$  e  $(-1, 1, 1)$  e é tangente ao gráfico de  $f(x, y) = xy$ . Existe mesmo só um?

33. Determine a equação do plano que passa pelos pontos  $(0, 1, 5)$  e  $(0, 0, 6)$  e é tangente ao gráfico de  $g(x, y) = x^3y$ .

34. Determine  $k \in \mathbb{R}$  para que o plano tangente ao gráfico de  $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$  no ponto  $(2, 1, f(2, 1))$  seja perpendicular ao plano  $3x + z = 0$ .

35. Se  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ , ache o vetor gradiente  $\nabla f(2, 1)$  e use-o para achar a reta tangente à curva de nível  $f(x, y) = 8$  no ponto  $(2, 1)$ . Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

36. Seja  $r$  a reta tangente à curva  $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$  no ponto  $(1, 2)$ . Determine as retas que são tangentes à curva  $x^2 + xy + y^2 = 7$  e paralelas à reta  $r$ .

37. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ . Para um determinado ponto  $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , sabe-se que o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  tem equação  $-2x + 2y - z + 3 = 0$ . Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de  $f$  que contém o ponto  $P$ :

(a)  $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{t}, t\right)$ ;

(b)  $\gamma(t) = \left(\frac{t^5}{5}, -\frac{2t^3}{3} + 3t\right)$ ;

(c)  $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$ .

38. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  com derivadas parciais contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e tal que  $2x + y + z = 7$  é o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, 2, f(0, 2))$ . Seja

$$g(u, v) = u f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v).$$

Determine  $a \in \mathbb{R}$  para que o plano tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(1, 1, g(1, 1))$  seja paralelo ao vetor  $(4, 2, a)$ .

39. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície

$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$

passam pela origem.

40. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que as imagens das curvas  $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$  e  $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$  estejam contidas no gráfico de  $f$ . Determine o gradiente de  $f$  no ponto  $(2, 1)$ .

41. Suponha que a imagem de uma curva  $\gamma$  derivável está contida no gráfico de uma função  $z = f(x, y)$  diferenciável. Mostre que a reta tangente a  $\gamma$  em um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  está contida no plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0, z_0)$ .

42. Suponha que a imagem de uma curva  $\gamma$  derivável está contida na intersecção dos gráficos de duas funções  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$ , ambas diferenciáveis. Determine a equação vetorial da reta tangente a  $\gamma$  em um de seus pontos, digamos  $(x_0, y_0, z_0)$ , em termos dos valores de  $f$ ,  $g$  e de suas derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ .
43. Sabe-se que a curva  $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + t)$  é uma curva de nível da função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(\gamma(t)) = 2 \forall t \in \mathbb{R}$ . Admita que existem 2 pontos  $(x_0, y_0) \in \text{Im}\gamma$  com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0, 2)$  é paralelo ao plano  $x + y - z = 0$ . Encontre esses 2 pontos.
44. Ache a derivada direcional máxima de  $f$  no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
- $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$ ,  $(1, 0)$ ;
  - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $(1, 2)$ ;
  - $f(x, y, z) = x + \frac{y}{z}$ ,  $(4, 3, -1)$ ;
  - $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ ,  $(4, 2, 1)$ .
45. Seja  $f$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e considere os pontos  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(1, 7)$  e  $D(6, 15)$ . Sabe-se que a derivada direcional de  $f$  em  $A$  na direção de  $\overrightarrow{AB}$  é 3 e que a derivada direcional de  $f$  em  $A$  na direção de  $\overrightarrow{AC}$  é 26. Encontre a derivada direcional de  $f$  em  $A$  na direção de  $\overrightarrow{AD}$ .
46. Mostre que  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$  é contínua em  $(0, 0)$  e tem todas as derivadas direcionais em  $(0, 0)$ . É  $f$  diferenciável em  $(0, 0)$ ?
47. Seja  $f$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  é uma curva de nível de  $f$ . Sabendo que  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$ , determine a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(-1, -4)$  e na direção e sentido do vetor  $\vec{u} = (3, 4)$ .
48. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- Calcule o gradiente de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .
  - Mostre que  $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \neq \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  em  $t = 0$ , onde  $\gamma(t) = (-t, -t)$ .
  - Seja  $\vec{u} = (m, n)$  um vetor unitário (isto é,  $m^2 + n^2 = 1$ ). Use a definição de derivada direcional para calcular  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ .
  - É  $f$  diferenciável em  $(0, 0)$ ? Justifique.



## RESPOSTAS

1. (a) não existe                      (b) 0                      (c) 0  
 (d) não existe                      (e) não existe                      (f) não existe  
 (g) não existe                      (h) 0                      (i) 0                      (j) 0

2. (a) 1                      (b) 0

4.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

6. (a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

(b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) = \frac{1}{z - t}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z, t) = \frac{1}{t - z};$   
 $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z, t) = \frac{y - x}{(z - t)^2}; \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = \frac{x - y}{(z - t)^2}.$

7. (a)  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right).$

(b)  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = af'(ax + by); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = bf'(ax + by).$

8. -2

12. (b) Não é contínua em (0,0).                      (c) Não é diferenciável em (0,0).

13. (b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$

- (c) Não é diferenciável em (0, 0).

- (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em (0, 0).

14. (b) Não

15. (b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2 + y^2)^2 \cos((x^2 + y^2)^2) - 2x^2y \operatorname{sen}((x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (c) Sim.

- (d) Sim.

17.  $f$  não é diferenciável em nenhum ponto da reta  $y = -x.$

22.  $-9600\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

23. Estão se distanciando a uma taxa de 10km/h.

24.  $a = 3$

29. (d) (i) grau 2; (ii) grau  $-1$ ; (iii) grau  $-\frac{3}{2}$ .

30. (a)  $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s \cos s \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4 \cos^2 s \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs} \frac{\partial G}{\partial x} + 6r \cos s \frac{\partial G}{\partial y}$ ;  
(b) 0.

31. (a)  $z = 1$ ;  $X = (0, 0, 1) + \lambda(0, 0, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(b)  $2x + y - z - 1 = 0$ ;  $X = (-1, 3, 0) + \lambda(2, 1, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(c)  $6x - 4y + z + 5 = 0$ ;  $X = (-3, -2, 5) + \lambda(6, -4, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(d)  $e^3 y - z - e^3 = 0$ ;  $X = (3, 1, 0) + \lambda(0, e^3, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

32.  $x + 6y - 2z - 3 = 0$  (sim, só um)

33.  $6x - y - z + 6 = 0$

34.  $k = 8$

35.  $\nabla f(2, 1) = (4, 8)$  e a reta é  $x + 2y - 4 = 0$ .

36.  $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5, -4)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

37. (c)

38.  $a = -4$

40.  $(1, 4)$

42.  $X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \wedge \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$ ,  
 $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Observe que  $z_0 = f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$ .)

43.  $(2, -1)$  e  $\left( \frac{10}{9}, -\frac{7}{27} \right)$

44. (a)  $\sqrt{5}$ ,  $(1, 2)$ ; (b)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\left( \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$ ;  
(c)  $\sqrt{11}$ ,  $(1, -1, -3)$ ; (d)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ,  $\left( \frac{1}{2}, 0, -2 \right)$ .

45.  $\frac{327}{13}$ .

46.  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

47.  $\frac{4}{5}$

48. (d) Não é.