5. **(2,5)** Sejam α, β e γ ângulos de um triângulo. Encontre o valor máximo de

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma).$$

Explique porque o valor encontrado é de fato o valor máximo de f.

Como α, β e γ são ângulos de um triângulo, temos que: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$

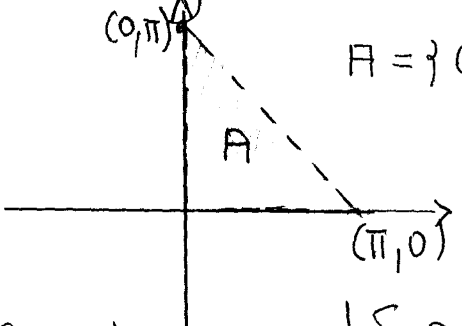
e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Podemos escrever $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, e seja

$g(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta,\pi-(\alpha+\beta)) = \cos\alpha\cos\beta\cos(\pi-(\alpha+\beta))$

$= -\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

Queremos então encontrar o valor máximo de g no conjunto $\alpha>0$, $\beta>0$ e $\pi-(\alpha+\beta)>0$



$A = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha>0,\ \beta>0 \text{ e } \alpha+\beta<\pi\}$

Não podemos garantir a existência do valor máximo de g em A.

Consideramos então o conjunto $K = \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0 \text{ e } \alpha+\beta\leq\pi\}$, isto é, K é o conjunto A unido com a sua fronteira.

K é compacto e a função g é contínua em K.

Pelo Teo. de Weierstrass, g tem máximo e mínimo em K.

Os candidatos a pontos de máximo de g em K são:

(1) pontos críticos de g no interior de K (ou seja, em A)

(2) pontos de máximo de g na fronteira de K.

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) = -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 0 \quad (*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 0 \end{cases}$

Daí: $-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha+\beta)$

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha+\beta) \Rightarrow$

$\cos(\alpha+\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) = 0 \Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=0$ ou $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=0$. Como $0<\alpha+\beta<\pi$,

Se $\cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = \pi/2$, Substituindo em $(*)$ temos

$\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}(\pi/2) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ ou $\cos\beta = 0$

$\longrightarrow$