5. **(2,5)** Sejam α, β e γ ângulos de um triângulo. Encontre o valor máximo de

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma).$$

Explique porque o valor encontrado é de fato o valor máximo de f.

Como α, β e γ são ângulos de um triângulo, temos $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Seja $A = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0\}$ e $B = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in A \mid \alpha+\beta+\gamma = \pi\}$.

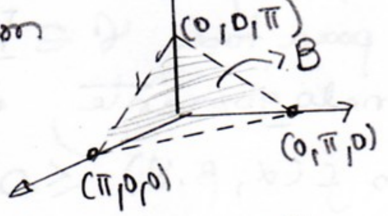
Queremos encontrar o máximo da função f em B.

Se $g(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha+\beta+\gamma$, então $\nabla g(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,1) \neq \vec{0}$.

A função g é de classe C^1 em A, f é diferenciável em A e A é aberto. Assim, podemos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange: Os candidatos a pontos de máximo de f em B são tais que

$$\nabla f(\alpha,\beta,\alpha) = \lambda \nabla g(\alpha,\beta,\gamma), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos então procurar $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}$ com



$$\begin{cases} -\operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos\gamma = \lambda \\ -\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \cos\gamma = \lambda \\ -\cos\alpha\cos\beta \operatorname{sen}\gamma = \lambda \\ \alpha+\beta+\gamma = \pi \end{cases}$$

Daí: $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha \operatorname{sen}\beta\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma$

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)\cos\gamma = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos\gamma = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 0$ ou $\cos\gamma = 0$.

Se $\cos\gamma = 0$, então, como $0 < \gamma < \pi$, temos que ter $\gamma = \pi/2$.

Mas, se $\gamma = \pi/2$, $\cos\alpha\cos\beta \operatorname{sen}\pi/2 = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma = 0$.

Daí, $\cos\alpha\cos\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$ ou $\beta = \pi/2$.

Isso dá origem aos pontos $(\pi/2, 0, \frac{\pi}{2})$ e $(0, \pi/2, \pi/2)$ que NÃO estão em B.

Assim, temos que ter $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 0$, o que implica que $\alpha - \beta = 0$ pois $-\pi < \alpha - \beta < \pi$. Portanto $\boxed{\alpha = \beta}$

De modo totalmente análogo, a equação $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma$ implica que $\beta = \gamma$.

Como $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, temos que $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$