4. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$, onde $\vec{\mathbf{u}} = (a,b)$ é um vetor unitário.

(b) Mostre que f NÃO é diferenciável em $(0,0)$?

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = g'(0)$ onde

$g(t) = f(0+at, 0+bt) = \sqrt[3]{at\,b^2t^2} = \sqrt[3]{ab^2}\, t$

Logo $g'(0) = \sqrt[3]{ab^2} = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$

(b) Do item (a) temos que:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(0,0) = \sqrt[3]{1.0^2} = 0$, $\vec{i} = (1,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(0,0) = \sqrt[3]{0.1^2} = 0$, $\vec{j} = (0,1)$

Logo $\nabla f(0,0) = (0,0) = \vec{0}$.

Se f fosse diferenciável em $(0,0)$ valeria a regra da cadeia, e então,

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0$

$\forall\, \vec{u} = (a,b)$ com $a^2+b^2 = 1$.

Mas pelo item (a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \sqrt[3]{ab^2}$ que obviamente não é 0 se a e b forem diferentes de 0!

Esta contradição mostra que f NÃO é diferenciável em $(0,0)$.

(Veja outra solução na prova A)