4. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{\vec{u}}}(0,0)$, onde $\mathbf{\vec{u}} = (a,b)$ é um vetor unitário.

(b) Mostre que f NÃO é diferenciável em $(0,0)$.

(a) $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{a^2bt^3}}{t} = \sqrt[3]{a^2b}$$

(b) Usando o item (a) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(0,0) = 0, \quad \vec{i} = (1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(0,0) = 0, \quad \vec{j} = (0,1)$$

$$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

$$= \sqrt[3]{x^2y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2y)^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (*)$$

Tomando a curva $\gamma(t) = (t,t)$, temos que γ é contínua em $t=0$ e $\gamma(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t^3)^{1/3}}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{2}\,|t|}.$$ Este limite não existe.

Logo, o limite $(*)$ não existe, portanto f NÃO é diferenciável em $(0,0)$.