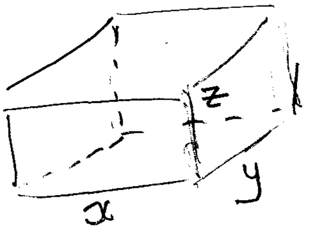
(2,0) 5) Dê a dimensão da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão. (Admita que o problema tem solução).



$V(x,y,z) = xyz$ = volume da caixa

$xy + 2xz + 2yz = 27$

Queremos achar o máximo de $V(x,y,z) = xyz$

com a condição que

$$\underbrace{xy + 2xz + 2yz}_{g(x,y,z)} = 27.$$

ADMITINDO que o problema tem solução, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, a solução está entre os pontos (x,y,z) tais que: $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ com

$$(*)\begin{cases} \nabla V(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ xy + 2xz + 2yz = 27 \end{cases}$$

(Observe que
$\nabla g(x,y,z) = (y+2z,\ x+2z,\ 2x+2y) \neq \vec{0}$ se $x>0, y>0$ e $z>0$)

De $(*)$ temos:

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) & (1) \\ xz = \lambda(x+2z) & (2) \\ xy = \lambda(2x+2y) & (3) \\ xy + 2xz + 2yz = 27 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (2) temos:

$yz - xz = \lambda(y-x)$

$(y-x)z = \lambda(y-x)$

$(y-x)[z-\lambda] = 0$

$\Rightarrow \underline{y-x=0}$ ou $\underline{z-\lambda=0}$

Se $z = \lambda$, a equação (1) $yz = \lambda(y+2z)$ fica $yz = z(y+2z)$. Como $z \neq 0$, $y = y+2z$, o que implica $z=0$, uma contradição.

Como $z=\lambda$ é impossível, temos que ter $\boxed{y=x}$

Temos $x^2 = 4\lambda x$, da equação (3). Logo, com $x \neq 0$, $x = 4\lambda$.

Substituindo na eq. (2), temos $xz = \frac{x}{4}(x+2z)$. Logo

$xz = x^2/4 + \frac{xz}{2}$

$\frac{xz}{2} = \frac{x^2}{4} \xRightarrow{x \neq 0} \frac{z}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow \boxed{x = 2z.}$

Substituindo em (4) temos

$x^2 + x^2 + x^2 = 27 \Rightarrow$
$x = 3 = y$ e $z = 3/2$.