(2,0) 4) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) É f diferenciável em $(0,0)$?

(a) $0 = f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y}_{\to 0} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = \boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3/y^2}{y} = \boxed{1}$$

(c) $$E(x,y) = f(x,y) - \left(f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\right)$$

$$= \frac{y^3}{x^2+y^2} - y = \frac{y^3 - x^2y - y^3}{x^2+y^2} = \frac{-x^2y}{x^2+y^2}$$

f é diferenciável se e somente se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

Mas $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ NÃO existe pois se

$\gamma(t) = (t,t)$, então

$\gamma(0) = (0,0)$, γ é contínua em $t=0$

e $$\lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{(2t^2)\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2\sqrt{2}\,|t|}$$ NÃO EXISTE.

Logo, f NÃO é diferenciável em (0,0).