Assuma que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável

(2,0) 3) A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x,y)$. Sabe-se que $f(2,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 1$. Determine a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(1)$.

$$G_f = \{ (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Como $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$, está contida no gráfico de f, temos que

$$z(t) = f(2t, t^2)$$

$$\gamma(1) = (2, 1, z(1)) = (2, 1, f(2,1)) = (2,1,3)$$

Como f é diferenciável, a função $z(t) = f(2t, t^2)$ é derivável.

$$\vec{\gamma}'(t) = (2, 2t, z'(t))$$

$$\vec{\gamma}'(1) = (2, 2, z'(1))$$

Equação da reta tangente em $\gamma(1)$ é:

$$X = (2,1,3) + \lambda \vec{\gamma}'(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos então calcular $z'(1)$.

Pela Regra da Cadeia:

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^2) \cdot 2t$$

$$\text{Logo } z'(1) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}_{1} \cdot 2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}_{1} 2$$

pela hipótese

Assim $z'(1) = 4$ e a equação da reta é:

$$\boxed{X = (2,1,3) + \lambda (2,2,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$