(2,0) 2. A função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tem, no ponto $(1,1,1)$, derivadas direcionais: igual a 1 na direção de $\vec{u} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção de $\vec{v} = -4\vec{\imath} + 3\vec{j}$ e igual a 0 na direção de $\vec{w} = \vec{j}$. Ache em que direção ocorre o valor máximo da derivada direcional de f no ponto $(1,1,1)$. Determine esse valor.

f diferenciável $\quad P = (1,1,1)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = 1, \quad \vec{u} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = 2, \quad \vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(P) = 0, \quad \vec{w} = \vec{j}$

A direção em que ocorre o valor máximo da derivada direcional de f é a direção do vetor $\nabla f(P)$ e $\|\nabla f(P)\|$ é o valor máximo. Temos então que

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) = (a,b,c)$$

Como f é diferenciável em P, temos:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \left\langle (a,b,c), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = \frac{1}{5}\langle (a,b,c), (0,4,3) \rangle = \frac{4}{5}b + \frac{3}{5}c$$

$$2 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \left\langle (a,b,c), \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \frac{1}{5}\langle (a,b,c), (-4,3,0) \rangle = -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(P) = b$$

Logo: $\boxed{b = 0}$ $\boxed{c = 5/3}$ e $\boxed{a = -5/2}$

$$\nabla f(P) = (-5/2, 0, 5/3)$$

$$\|\nabla f(P)\| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{9}} = \frac{5}{6}\sqrt{13}$$

O valor máximo é então $\boxed{\frac{5\sqrt{13}}{6}}$.