Prova de Recuperação

MAT-2454 - Cálculo Diferencial e Integral II para Engenharia

POLI - USP - 12/02/07

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Nome: ______________________________ Turma: ____

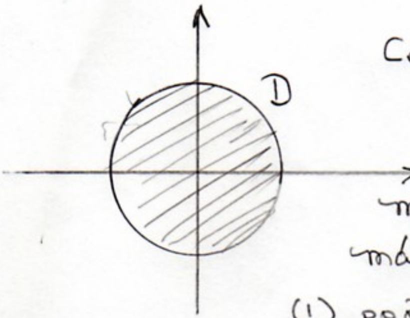
Assinatura: ______________________________

Professor: ______________________________

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

(2,0) 1) Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ no conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Como o conjunto D é compacto (fechado e limitado) e a função f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em D. Os candidatos a pontos de máximo e de mínimo de f são:

(1) pontos críticos de f no interior de D.

(2) pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira de D.

(1) Interior de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2$ $\quad 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$ $\quad 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

(0,0) é o único ponto crítico de f no interior de D

(2) fronteira de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

Podemos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange

$$(2x, 2y) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y) \in \text{fronteira de } D$$

Os pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira de D (existem, pois a fronteira de D é um compacto) estão entre os ptos (x,y) tais que $\nabla f(x,y) = \lambda(2x, 2y)$ e $x^2+y^2 = 1$, ou seja

$$(6x^2, 4y^3) = \lambda(2x, 2y) \text{ e } x^2+y^2 = 1$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda x \\ 2y^3 = \lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y \neq 0$, $\therefore y = \pm 1$

$y = 0 \Rightarrow x \neq 0$, $x = \pm 1$

$x \neq 0$ e $y \neq 0$

$x = \lambda/3$

$y^2 = \lambda/2$

$\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{2} = 1$

$\Rightarrow \lambda = 3/2$ ou $\lambda = -6$ $\Rightarrow x = 1/2$, $y = \pm\sqrt{3}/2$ ou $\cancel{x = -2}$ NÃO SERVE

Candidato (x,y)	f(x,y)
(0,0)	0
(0,±1)	1
(±1,0)	±2 → MÁXIMO / MÍNIMO
(1/2, ±√3/2)	13/16