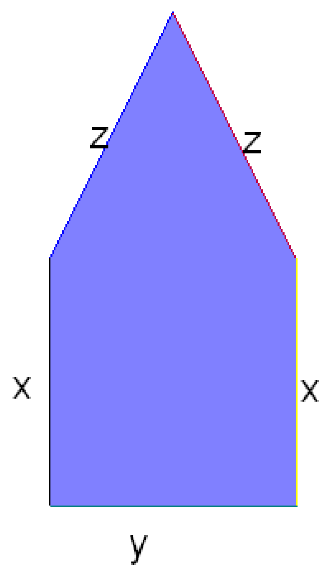
MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2006

Exercício 35 da Lista 3

Problema: Queremos construir um pentágono, como na figura abaixo, com perímetro igual a 12 e de modo que sua área seja máxima.



A área de tal pentágono é

$$A(x, y, z) = xy + y\frac{\sqrt{4z^2 - y^2}}{4}.$$

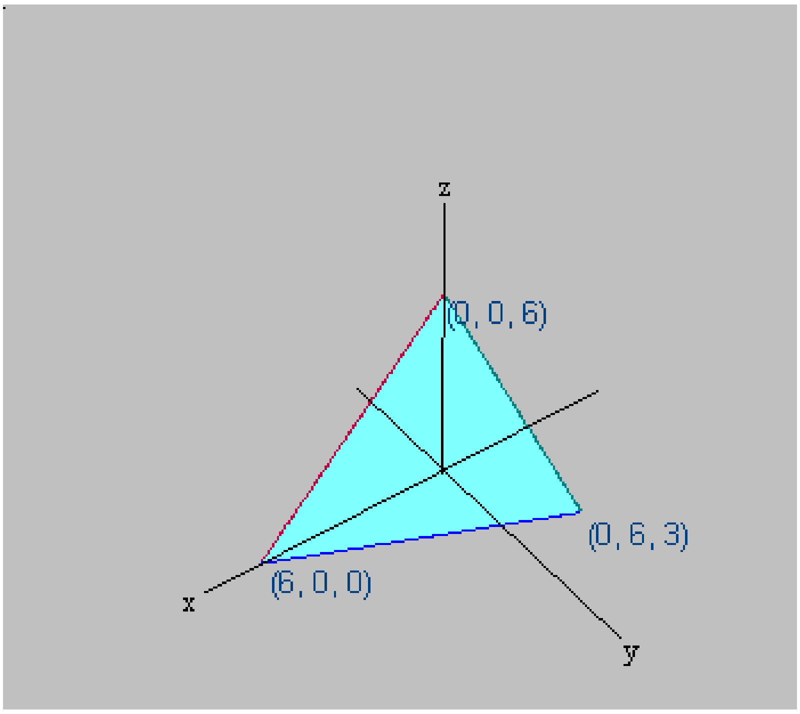
Para formar o pentágono temos que ter $x > 0$, $y > 0$ e a altura do triângulo $h = \frac{\sqrt{4z^2 - y^2}}{2} > 0$, o que implica que $z > \frac{y}{2}$. Seja

$$\mathbf{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0 \text{ e } z > \frac{y}{2}\}.$$

e

$$\mathbf{B} = \{(x, y, z) \in \mathbf{A} | 2x + y + 2z = 12\}.$$

Queremos então encontrar o máximo de $A(x, y, z)$ no conjunto $\mathbf{B}$. O conjunto $\mathbf{B}$ é o interior do triângulo da figura abaixo. (Verifique !)



Para ver que o problema tem solução consideramos o conjunto **compacto K** formado pelo conjunto **B** e sua fronteira, isto é,

$$\mathbf{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{A} \mid 2x + y + 2z = 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq \frac{y}{2}\}.$$

Como a função $A(x, y, z)$ é contínua em **K**, pelo Teorema de Weierstrass, A tem máximo e mínimo em **K**. Analisaremos a função $A(x, y, z)$ na fronteira de **K**.

1. y = 0
   Nesse caso $A(x, 0, z) = 0)$ para todo x e z.

2. $y = 2z$ ou $z = \dfrac{y}{2}$. Nesse caso não se constrói o triângulo e o problema é construir o retângulo de área máxima com perímetro igual a 12.
   De fato, $A(x, y, \frac{y}{2}) = xy$, e a condição é $2x + 2y = 12$.
   Este é um problema de Cálculo I. Resolva! A resposta é $x = y = 3$ e então a área máxima é igual a 9.

3. $x = 0$. Observe que nesse caso constrói-se apenas o triângulo. O problema é então determinar o triângulo de área máxima com perímetro igual a 12.
   De fato, $A(0, y, z) = y\dfrac{\sqrt{4z^2 - y^2}}{4}$ e a condição é $y + 2z = 12$ com $z \geq \dfrac{y}{2}$. Este é outro problema de Cálculo I. Resolva-o também. O máximo da área ocorre quando $y = z = 4$ e a área é $4\sqrt{3} \approx 6,93$.

Da análise acima vimos que o máximo de A na fronteira de **K** é 9.

Finalmente, vamos achar os candidatos a pontos de máximo da função $A(x, y, z)$ no conjunto **B**. Estamos dentro das hipóteses do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Então o ponto de máximo da função A em **B** (se existir) tem que ser um ponto (x, y, z)

satisfazendo:
“ *Existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla A(x,y,z) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial A}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial A}{\partial z}(x,y,z)\right) = \lambda(2,1,2)$$

e

$$2x + y + 2z = 12.”$$

Obtemos assim as equações:

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y,z) = y = 2\lambda \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y,z) = x + \frac{1}{4}\left[\sqrt{4z^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{4z^2 - y^2}}\right] = \lambda, \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}(x,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{4z^2 - y^2}} = 2\lambda. \quad (3)$$

Das equações (1) e (3)obtemos que

$$\frac{z}{\sqrt{4z^2 - y^2}} = 1,$$

já que $y \neq 0$, e daí vem que $y^2 = 3z^2$. Substituindo na equação (2), obtemos que

$$x = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) z.$$

Agora, substituindo na condição $2x + y + 2z = 12$ obtemos

$$z = 4(2\sqrt{3} - 3), \quad y = 12(2 - \sqrt{3}), \quad x = 2(3 - \sqrt{3}),$$

e nessas condições a área é

$$A = 12(6 - 3\sqrt{3}) \approx 9,64.$$

Conclusão: O valor da área A obtido nessa última etapa é maior do que o valor máximo de A na fronteira de $\mathbf{K}$, e portanto é o valor máximo da função A em $\mathbf{K}$. Em particular, ele o máximo de A em $\mathbf{B}$. Isto prova que o problema tem solução, que é construir o pentágono com $x = 2(3 - \sqrt{3})$, $y = 12(2 - \sqrt{3})$ e $z = 4(2\sqrt{3} - 3)$.