B

3ª Questão: (3,5 pontos) Considere a curva dada por $\gamma(t) = (x(t),\ y(t))$, onde $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = t^3 - 12t$.

a) Analise o crescimento e decrescimeto de $x(t)$ e $y(t)$.
b) Estude a concavidade da imagem de γ.
c) Determine (se houver) os pontos de auto-intersecção e os pontos onde a imagem de γ corta os eixos.
d) Calcule os limites necessários e esboce a imagem da curva γ.

a) $x'(t) = 2t + 2 = 2(t+1)$

t	$t<-1$	$t>-1$
x'	$-$	$+$
x	decresce	cresce

$y'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2-4)$

t	$t<-2$	$-2<t<2$	$t>2$
y'	$+$	$-$	$+$
y	cresce	decresce	cresce

	$t<-2$	$-2<t<-1$	$-1<t<2$	$t>2$
x'	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y'	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
γ'	$\nwarrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\nearrow$

b) Concavidade de $Im(\gamma)$ é dada pelo sinal de $\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \cdot x'(t)$

$$\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2-4}{t+1}\right)' = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2+2t+4}{(t+1)^2}\right)$$

Como $t^2+2t+4 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, a concavidade é dada pelo sinal de $x'(t)$:

t	$t<-1$	$t>-1$
	$\cap$	$\cup$

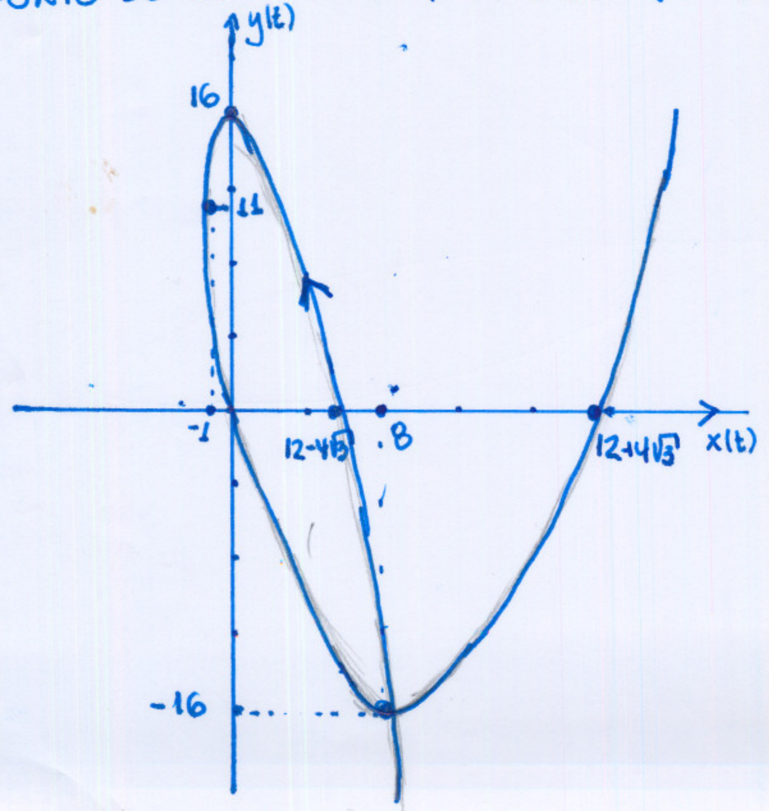
c) $x(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = -2$ $\Rightarrow \gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(-2) = (0,16)$ são os pontos da curva que estão no eixo y

$y(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(-2\sqrt{3}) = (12-4\sqrt{3}, 0)$ e $\gamma(2\sqrt{3}) = (12+4\sqrt{3}, 0)$ são os pontos da curva que estão no eixo y

AUTO INTERSEÇÃO:

$$\begin{cases} t^2+2t = u^2+2u \\ t^3-12t = u^3-12u \\ t \neq u \end{cases} \iff \begin{cases} t^2-u^2 = 2(u-t) \\ t^3-u^3 = 12(t-u) \\ t \neq u \end{cases} \iff \begin{cases} t+u = -2 \\ t^2+tu+u^2 = 12 \\ t \neq u \end{cases} \iff t = -4 \text{ (e } u=2) \text{ ou } t = 2 \text{ (e } u=-4)$$

PONTO DE AUTO INTERSECÇÃO: $\gamma(2) = \gamma(-4) = (8, -16)$



t	$\gamma(t)$
-4	$(8,-16)$
$-2\sqrt{3}$	$(12-4\sqrt{3},0)$
-2	$(0,16)$
-1	$(-1,11)$
0	$(0,0)$
2	$(8,-16)$
$2\sqrt{3}$	$(12+4\sqrt{3},0)$

$\lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$

$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$