A

3ª Questão: (3,5 pontos) Considere a curva dada por $\gamma(t) = (x(t),\ y(t))$, onde $x(t) = t^3 - 12t$, $y(t) = t^2 - 2t$.

a) Analise o crescimento e decrescimeto de $x(t)$ e $y(t)$.
b) Estude a concavidade da imagem de γ.
c) Determine (se houver) os pontos de auto-intersecção e os pontos onde a imagem de γ corta os eixos.
d) Calcule os limites necessários e esboce a imagem da curva γ.

a) $x'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2-4)$ $y'(t) = 2t - 2 = 2(t-1)$

	$t<-2$	$-2<t<2$	$t>2$
x'	+	−	+
x	cresce	decresc.	cresce

	$t<1$	$t>1$
y'	−	+
y	decresce	cresce

	$t<-2$	$-2<t<1$	$1<t<2$	$t>2$
x'	→	←	←	→
y'	↓	↓	↑	↑
γ'	↘	↙	↖	↗

b) concavidade de $Im(\gamma)$ é dada pelo sinal de $\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \cdot x'(t)$

$$\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \left(\frac{2t-2}{3t^2-12}\right)' = -\frac{6(t^2-2t+4)}{(3t^2-12)^2}$$

$$t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ concavidade é dada pelo sinal de $\frac{-6}{3t^2-12}$

	$t<-2$	$-2<t<2$	$t>2$
sinal	−	+	−
concavidade	∩	∪	∩

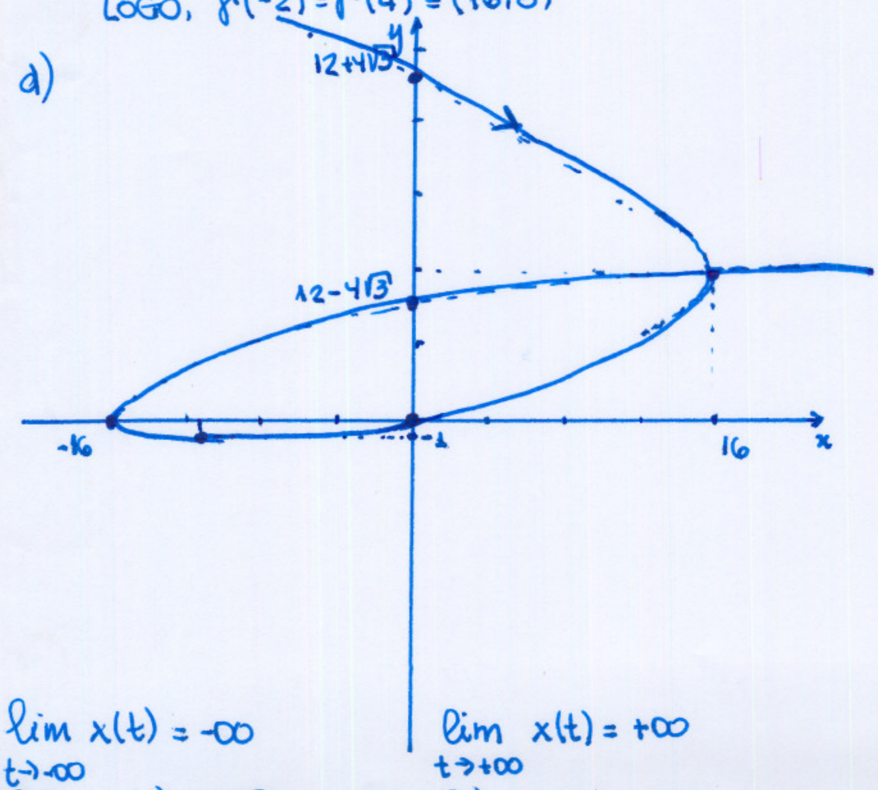
c) $x(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \pm 2\sqrt{3}$
$y(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 2$

AUTO-INTERSECÇÃO: $\begin{cases} t^3 - 12t = u^3 - 12u \\ t^2 - 2t = u^2 - 2u \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - u^3 = 12(t-u) \\ t^2 - u^2 = 2(t-u) \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + tu + u^2 = 12 & (I) \\ t + u = 2 & (II) \\ t \neq u \end{cases}$

SUBSTITUINDO $t = 2 - u$ em (I) obtemos $u^2 - 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{u = -2 \text{ ou } u = 4}$

LOGO, $\gamma(-2) = \gamma(4) = (16, 8)$

d)



t	$\gamma(t)$
$-2\sqrt{3}$	$(0, 12+4\sqrt{3})$ (intercepta eixo y)
-2	$(16, 8)$ (auto intersecção)
0	$(0,0)$ (intercepta ambos os eixos)
1	$(-11, -1)$
2	$(-16, 0)$ (intercepta eixo x)
$2\sqrt{3}$	$(0, 12-4\sqrt{3})$ (intercepta eixo y)
4	$(16, 8)$ (auto intersecção)

$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$ $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$

$\lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$ $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$