MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
2º semestre de 2006 - 1ª Prova - 11.09.2006

B

Nome : GABARITO

NºUSP :

Professor:

Turma:

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique todas as respostas

1ª Questão: Seja $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \ln x$ em torno de $x_0 = 1$.

(a) (1,0 ponto) Determine $P_n(x)$ e mostre que para todo $x > 1$, tem-se

$$|\ln x - P_n(x)| \le \frac{1}{n+1}|x-1|^{n+1}.$$

(b) (1,0 ponto) Avalie $\ln(1,02)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

(a) Tome $f(x) = \ln x$ e $x_0 = 1$. Então:

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$

$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6$

Note que de modo geral: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$, para $n > 1$.

Logo, como $f(x_0) = \ln 1 = 0$, temos:

$$P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!(x-1)^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

Portanto,

$$\boxed{P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n},\ n \geq 1}$$

Lembrando que $f(x) - P_n(x) = E(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$,

onde $\bar{x}$ é algum número entre x e x_0, temos:

$$|\ln x - P_n(x)| \le \left| \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{\bar{x}^{n+1}} (x-1) \right|^{n+1}, \text{ para algum } \bar{x} \text{ entre } 1 \text{ e } x.$$

Como $x > 1$, temos $1 < \bar{x} < x$. Então, $\dfrac{1}{\bar{x}^{n+1}} \le 1$ e temos:

$$|\ln x - P_n(x)| \overset{(\bar{x}>1)}{\le} \left| \frac{1}{n+1} (x-1)^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} |x-1|^{n+1}$$

(b)

Se $n = 2$ e $x = 1{,}02$, temos que:

$$\frac{1}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1} = \frac{1}{3} (0{,}02)^3 = \frac{1}{3} (2 \cdot 10^{-2})^3 < 10^{-5}$$

Assim se $n = 2$, $|\ln(x) - P_n(x)| < 10^{-5}$ para $x = 1{,}02$.

$$P_2(1{,}02) = (1{,}02 - 1) - \frac{(1{,}02 - 1)^2}{2} = 0{,}0198$$

Logo $\ln(1{,}02) \cong 0{,}0198$ com erro inferior a 10^{-5}