MAT 2454 - Cálculo II - POLI
3^a Lista - 2006

1. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos (3,-1,0) e (5,3,6).

2. a) Mostre que toda reta normal a uma esfera passa pelo seu centro.

   b) Mostre que o plano tangente à superfície $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ no ponto (x_0, y_0, z_0) tem como equação $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$.

   c) Mostre que todos os planos tangentes ao cone $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ passam pela origem.

3. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

4. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a,\ a \neq 0$ e que seja paralelo ao plano $x + y + z + 100 = 0$

5. Mostre que o elipsóide $3x^2+2y^2+z^2 = 9$ e a esfera $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24 = 0$ se tangenciam no ponto (1,1,2) (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

6. Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.

7. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $4x^2+y^2+z^2 = 9$ no ponto (-1,1,2).

   (<u>Sugestão</u>: Use vetores normais.)

8. Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

9. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1,0) = (2,1)$ e $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$. para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1,0,-1) \in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

10. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2 + (y-2)^2/4 - (z-1)^2 = 0$ nos pontos (2,2,2) e (2,2,0).

11. São dados o cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ e a família de esferas $x^2 + y^2 + (z - 2\alpha)^2 = \alpha^2$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

    a) Esboce o cone e algumas esferas da família.

    b) Mostre que essas superfícies são tangentes em seus pontos de intersecção, isto é, elas têm o mesmo plano tangente nesses pontos.

12. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y,\ (1,0)$ b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ (1,2)$
    c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y}{z},\ (4,3,-1)$ d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z},\ (4,2,1)$.

13. Seja $f(x,y)$ de classe C^2 e considere os pontos $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$ e $D(6,15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AB}$ é 3 e que a derivada direcional e f em A na direção de $\overrightarrow{AC}$ é 26. Encontre a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AD}$.

14. Mostre que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em (0,0) e aí

    possui todas as derivadas direcionais em (0 , 0). É f diferenciável (0 , 0)?

15. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

    (a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

(c) Qual é a maior taxa de variação em P?

16. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto (-1,-4) e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

17. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+y^3}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2+n^2=1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(b) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

18. Seja $f(x,y) = \ln\,(x+y)$.

a) Determine o polinômio de Taylor de ordem um de f em torno de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) Mostre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $x+y>1$, tem-se

$$|\ln(x+y) - (x+y-1)| < \frac{1}{2}(x+y-1)^2$$

19. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto dado:

a)$f(x,y) = e^{x+5y}, \qquad P = (0,0)$;

b)$f(x,y) = x^3+y^3-x^2+4y, \qquad P = (1,1)$;

c)$f(x,y) = \text{ sen}\,(3x+4y), \qquad P = (0,0)$

20. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

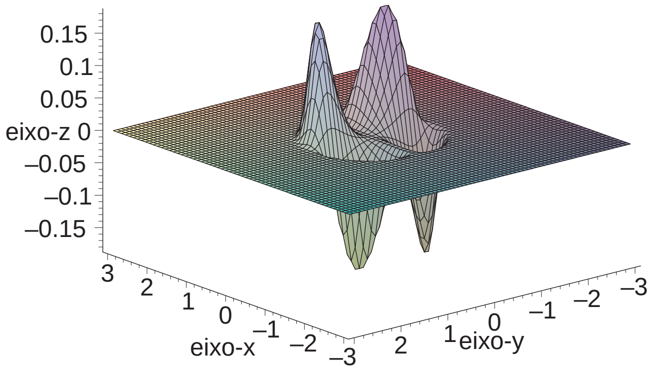
a) $z = 2x^2+xy+3y^2+10x-9y+11$
b) $z = 3xy^2+y^2-3x-6y+7$
c) $z = x^2y^2$
d) $z = x^3y^3$
e) $z = y\sqrt{x}-y^2-x+6y$
f) $z = y\cos x$
g) $z = (2x-x^2)(2y-y^2)$
h) $z = x^4+y^4-4xy+1$
i) $z = xye^{-x^2-y^2}$
j) $z = \ln(3x^2+4y^2-2x+7)$
k) $z = (x-1)^3+(y-2)^3-3x-3y$

21. A figura 1 exibe o gráfico de $f(x,y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$.

    a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.

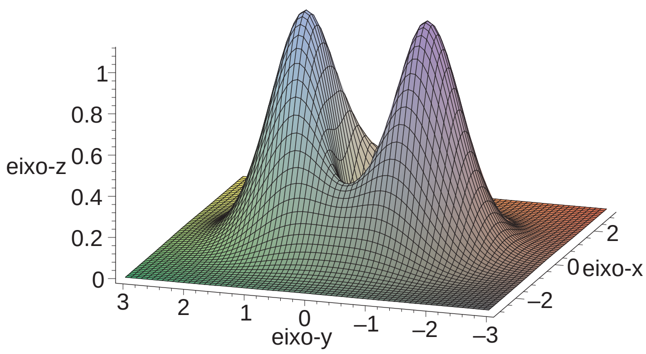
    b) Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.

    c) Classifique os demais pontos críticos.



22. Seja f uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Supondo que (0,0) é ponto crítico de f e que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \geq 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq 0$, prove que (0,0) é ponto de mínimo global de f.

23. A figura 2 exibe o gráfico de $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de f.



24. Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;

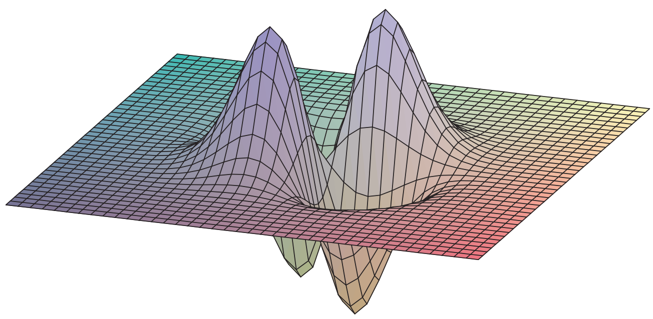
b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.

Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?

Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

25. Considere $f(x,y)$ uma função de classe C^2. Fixado $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ no gráfico de f, a interseção desse gráfico com um plano paralelo ao eixo z e que passa por $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ é uma curva. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de mínimo local de f, então P_0 é um ponto de mínimo local dessa curva. Por quê? Por outro lado, se todo plano paralelo ao eixo z e passando por $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ intercepta o gráfico de f numa curva que tem um mínimo local em P_0, podemos concluir que P_0 é ponto de mínimo local de f? Mostre que a resposta é negativa examinando a função $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ nas retas $y = mx$ e $x = 0$.

26. Ache os pontos críticos da função $f(x,y) = 10xye^{-x^2-y^2}$. Classifique-os. Qual o maior e o menor valor que f assume?
Dica: Olhe para o gráfico de f na figura 3.



27. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

28. Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, polinomial, que só tenha um ponto crítico e este ponto seja mínimo local <u>sem ser mínimo global</u>? Analise a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$. Você é capaz de esboçar o gráfico?

29. Determine o máximo e o mínimo valores da função f sujeita às restrições explicitadas:

    a) $f(x,y) = xy; \quad 9x^2 + y^2 = 4$

    b) $f(x,y,z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

    c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

    d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

30. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)

    a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são (0,0), (4,0) e (4,5).

    b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0, \quad y \geq 0\}$.

    c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

    d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ -3 \leq x \leq 3, \quad -3 \leq y \leq 3\}$.

    e) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 3, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

31. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

    a) $f(x,y) = xy \quad D = \{(x,y)\ :\ x^2 - y^2 = 1 \ \ x \in [1,2]\}$

    b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4 \quad D = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 = 1 \ \ x \in [0,1/4],\ y \geq 0\}$

    Você pode usar multiplicadores de Lagrange para resolver esse exercício?

32. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto (1,1,1)?

33. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

34. Determine a distância entre as retas de equação

$$X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e

$$X = (-1, 0, 3) + \alpha(-2, 3, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

35. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine aquele que tem área máxima.

36. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

37. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma$.

38. Determine a equação do plano que passa por (2,2,1) e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

39. Seja $T(x, y) = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dá da temperatura do ponto (x, y) do plano. Sabendo que uma partícula está na região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y \geq -x+1\}$ qual é a temperatura máxima dessa partícula? E a mínima?

40. Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x, y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

    a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

    b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices (0,0), (3,3) e (-3,3).

41. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

42. Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.

(a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f.

(b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f?

43. A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

44. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

45. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

46. (a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f. (Dica: dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.)

(b) (Método dos Mínimos Quadrados). Sejam $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ pontos do $\mathbb{R}^2$ $(n \geq 3)$. Considere a função $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (xa_i + y - b_i)^2$. Prove que a função E tem um único ponto de mínimo global (x_0, y_0). Qual a relação entre a reta $f(x) = x_0 x + y_0$ e os pontos $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$?

RESPOSTAS

1. $\pm\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

4. $x + y + z - 3\sqrt[3]{a} = 0$.

7. (5 , 8 , 6).

8. $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

9. $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.

10. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$

12. a) $\sqrt{5}$; $(1, 2)$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$; c) $\sqrt{11}$; $(1, -1, -3)$; d) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$; $\left(\dfrac{1}{2}, 0, -2\right)$.

13. $\dfrac{327}{13}$.

14. Não.

15. a) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$, b) (38,6,12), c) $2\sqrt{406}$.

16. 4/5.

17. a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \dfrac{2m^3 + n^3}{m^2 + n^2}$, b) Não.

18. a) $x + y - 1$

19. a) $1 + x + 5y$; b) $5 + (x - 1) + 7(y - 1)$; c) $3x + 4y$

20. a) (-3,2) mínimo; b) (2/3,1), (-4/3,-1) selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) (4,4) máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) (1,1) máximo, (0,0), (2,0), (0,2), (2,2) selas; h) (0,0) sela, (1,1) e (-1,-1) mínimos; i) (0,0) sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) (1/3, 0) mínimo; k) (2,1) e (0,3) sela; (2,3) mínimo e (0,1) máximo.

21. a) $(a, 0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8}), \pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$. c)$(0, 0)$ é ponto de sela; $(a, 0)$, com $a > 0$ é ponto de mínimo local e $(a, 0)$ com $a < 0$ é ponto de máximo local.

23. mínimo $f(0, 0) = 0$; máximo $f(0, \pm 1) = 3e^{-1}$

24. a) $a > 0$; b) $a < 0$; c) não; d) $a = 0$.

26. $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; valor máximo $5e^{-1}$, valor mínimo $-5e^{-1}$.

29. a) max $f(\pm\sqrt{2}/3, \pm\sqrt{2}) = 2/3$; min $f(\pm\sqrt{2}/3, \mp\sqrt{2}/3) = -2/3$; b) max $2/\sqrt{3}$, min $-2/\sqrt{3}$; c) max $1/27$, min 0; d) max $\sqrt{3}$, min 1.

30. a) máximo: $f(4,5) = 13$, mínimo: $f(4,0) = -7$; b) máximo: $f(0,0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2e}$; c) máximo: $f(1,0) = 2$, mínimo: $f(-1,0) = -2$; d) máximo: $f(3,-3) = 57$, mínimo: $f(-2,-1) = -7$; e) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

31. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\dfrac{1}{32} + (\,\frac{15}{16}\,)^2$ e máximo 1.

32 (0,-1,2).

33 $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.

34 $\sqrt{12}$.

35. $12(2-\sqrt{3}), 2(3-\sqrt{3}), 4(2\sqrt{3}-3)$

36. (0,0,1) ou (0,0,-1).

37. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

38. $x + y + 2z - 6 = 0$

39. máxima: 8; mínima: não há.

40. a) $b > 0$ 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1\right)$ e $(0,-2)$ pontos de sela; (0 , -2) máx. local e (0 , 2) mín. local; e se $b < 0$ 3 pontos críticos: (0 , 0) e (0 , 2) pontos de sela; (0 , -2) mín. local.

b) Pontos de mdx: (-3 , 3) e (3 , 3); ponto de mín. (0 , 2).

41. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $\quad 2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
$2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $\quad 2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.

42. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: (0,0) é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: (0,0) é ponto de máximo global.

43 Mais quentes: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$; Mais frios : $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$.

44 base 3×3cm, altura 1,5cm.

45. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.