MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2006

2^a lista de exercícios

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

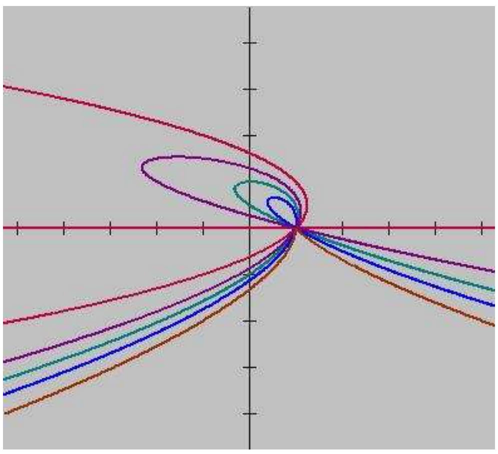
2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

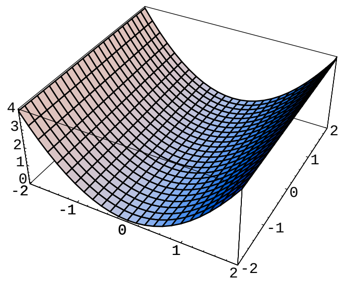
3. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x,y)\neq(1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



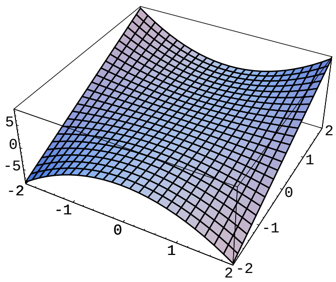
4. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1),\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,1). \end{cases}$$

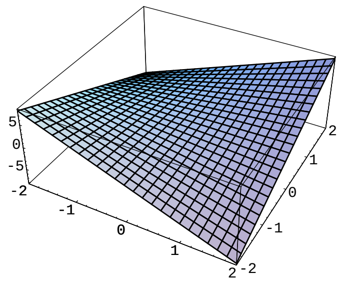
5. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua escolha.



(I)



(II)



(III)

6. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{z-t}$

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:
   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

8. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   [**Sugestão:** Dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação.]

9. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

10. Verifique que a função $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é solução da equação de Laplace tridimensional
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

11. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2^a ordem.

    (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

    (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em (0,0)?

(c) f é diferenciável em (0,0)?

13. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em (0,0).

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) É f diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

14. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

15. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\text{sen}\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

16. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

17. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

18. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$.

(b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\text{sen}u$.

(c) $w = x^2+y^2+z; x = tu, y = t+u, z = t^2+u^2$.

19. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

20. Um carro A está viajando para o norte a 90km/h e um carro B está viajando para o oeste a 80km/h. O carro A está se aproximando e o carro B está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro A está a 0,3km da intersecção e o carro B a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?

21. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e
$$g(t) = f(2t^3-4t, t^4-3t).$$
Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x+3$.

22. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$. As derivadas parciais de f nos pontos da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}t, t)$ são: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) = \cos t$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) = \text{sen}t$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big) = t^2+t-2$. Para $t \in [-\pi, 2\pi]$, em quais pontos da hélice f pode atingir seu máximo? E seu mínimo?

23. Seja $f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2+b^2 = 1$, $c^2+d^2 = 1$ e $ac+bd = 0$. Seja $g(u,v) = f(au+bv, cu+dv)$. Mostre que:
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv, cu+dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv, cu+dv).$$

24. (a) Seja $v(r,s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$, onde c é constante. Verifique que:
$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = w(x+ct, x-ct),$$
onde $w(r,s) = -4c^2 v_{rs}(r,s)$.

*(b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções F e G de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que
$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

[***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 11 (a).]

25. Seja $u(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \Delta u(r\cos\theta, r\text{sen}\theta),$$
onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

26. Seja $f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t)=f(e^s\cos t, e^s\text{sen}t)$, mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right].$$

27. Uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz

$$f(tx,ty)=t^\lambda f(x,y) \text{ para todo } t>0 \text{ e } (x,y)\in\mathcal{D}_f \qquad (H)$$

onde λ é um número real fixado. Suponha que f é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ que é homogênea de grau λ. Prove que:

(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda f(x,y)$;

(b) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\lambda(\lambda-1)f(x,y)$;

(c) As funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são homogêneas de grau $\lambda-1$.

(d) Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(i) $f(x,y)=5x^2+2xy-y^2$ (ii) $f(x,y)=\dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2}$

(iii) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$.

[**Sugestões:**

(a) Derive (H) em relação a t e faça $t=1$.

(b) Derive (H) duas vezes em relação a t e faça $t=1$.

(c) Derive (H) em relação a x e em relação a y.]

28. (a) Suponha que a equação $F(x,y,z)=k$ (k constante) define implicitamente cada uma das variáveis x,y e z como função das outras: $z=f(x,y), y=g(x,z), x=h(y,z)$. Se F é diferenciável e se F_x, F_y e F_z são não-nulas, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}=-1$.

(b) Verifique por meio de um cálculo direto a equação acima para os casos particulares:

(i) $ax+by+cz=d$, a, b e c não-nulos;

(ii) $PV=kT$, k constante, P, V e T positivos;

(iii) $x^2+y^2+z^2=1$, (x,y,z) no primeiro octante.

29. Seja $F(r,s)=G(e^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1,t+1)=t^2-2t+3$.

30. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

    (a) $z = e^{x^2+y^2}$ no ponto $(0, 0, 1)$,

    (b) $z = \ln(2x + y)$ no ponto $(-1, 3, 0)$,

    (c) $z = x^2 - y^2$ no ponto $(-3, -2, 5)$,

    (d) $z = e^x \ln y$ no ponto $(3, 1, 0)$.

31. Determine o plano que passa por $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$. Existe mesmo só um?

32. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3y$.

33. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

34. Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2, 1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 8$ no ponto(2,1). Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

35. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1, 2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

36. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Para um determinado ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0, y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto. P:

    (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$;

    (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$;

    (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

37. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0, 2)\big)$. Seja

    $$g(u, v) = u\, f\big(\mathrm{sen}(u^2 - v^3), 2u^2v\big).$$

    Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1, 1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

38. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

39. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2t, t^2, t^3)$ e $\mu(t) = (2, t, t^2)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

40. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida no gráfico de uma função $z = f(x, y)$ diferenciável. Mostre que a reta tangente a γ em um ponto (x_0, y_0, z_0) está contida no plano tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0, z_0).

41. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida na intersecção dos gráficos de duas funções $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, ambas diferenciáveis. Determine a equação vetorial da reta tangente à imagem de γ em um de seus pontos, digamos (x_0, y_0, z_0), em termos dos valores de f, g e de suas derivadas parciais em (x_0, y_0).

42. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.

(b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

(c) f é diferenciável no ponto $(0, 0)$?

43. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2\ \forall t \in \mathbb{R}$. Determine todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathrm{Im}\gamma$ tais que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ seja paralelo ao plano $x + y - z = 0$.
Observação: Admita a existência desses 2 pontos (x_0, y_0) com essas propriedades!

RESPOSTAS

1. (a) não existe (b) 0 (c) 0
(d) não existe (e) não existe (f) não existe
(g) não existe (h) 0 (i) 0 (j) 0

2. (a) $\pi/2$ (b) 0 (c) 1

4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

6. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{z-t}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{t-z}$;
$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) = \dfrac{y-x}{(z-t)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{(z-t)^2}$

7. (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y} f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2} f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$.

8. -2

12. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

13. (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Não é diferenciável em $(0,0)$.

(d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

14. (b) Não

15. (b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\operatorname{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c)Sim. (d)Sim.

19. -9600π cm^3/s

20. Estão distanciando-se a uma taxa de 10km/h.

21. $a = 3$

22. O máximo de f é atingido em $\gamma(-2) = \big(\cos(-2), \operatorname{sen}(-2), -2\big)$ ou em $\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$, e o mínimo é atingido em $\gamma(-\pi) = (-1, 0, -\pi)$ ou $\gamma(1) = (\cos 1, \operatorname{sen} 1, 1)$.

27. (d) (i) grau 2 (ii) grau -1 (iii) grau $-\dfrac{3}{2}$

29. (a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s\cos s \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4\cos^2 s \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs}\dfrac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s \dfrac{\partial G}{\partial y}$;

(b) 0.

30. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0, e^3, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

31. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um) 32. $6x - y - z + 6 = 0$

33. $k = 8$ 34. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

35. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

36. (c) 37. $a = -4$ 39. $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$

41. $X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right) \wedge \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Observe que $z_0 = f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$.)

42. (a)$(1,1)$ (c)Não é.

43. $(2,-1)$ e $\left(\dfrac{10}{9}, -\dfrac{7}{27}\right)$