MAT2454 - Cálculo II - POLI

Primeira Lista de Exercícios - 2006

TAYLOR

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:
   (a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) $\operatorname{sen}(0,1)$

2. Mostre que:
   a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right) < \dfrac{1}{2}x^3$ para $0 \leq x \leq 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n natural ímpar. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

   b) Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.
   b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5}.
   c) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \leq \frac{e^{x^2}x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

   d) Avalie $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que $\displaystyle\left|\int_0^1 \cos(x^2)dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right)\right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até $2^{\underline{a}}$ ordem em I. Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o "teste da segunda derivada", isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e
   a) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f tem mínimo em a.
   b) Se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f tem máximo em a.

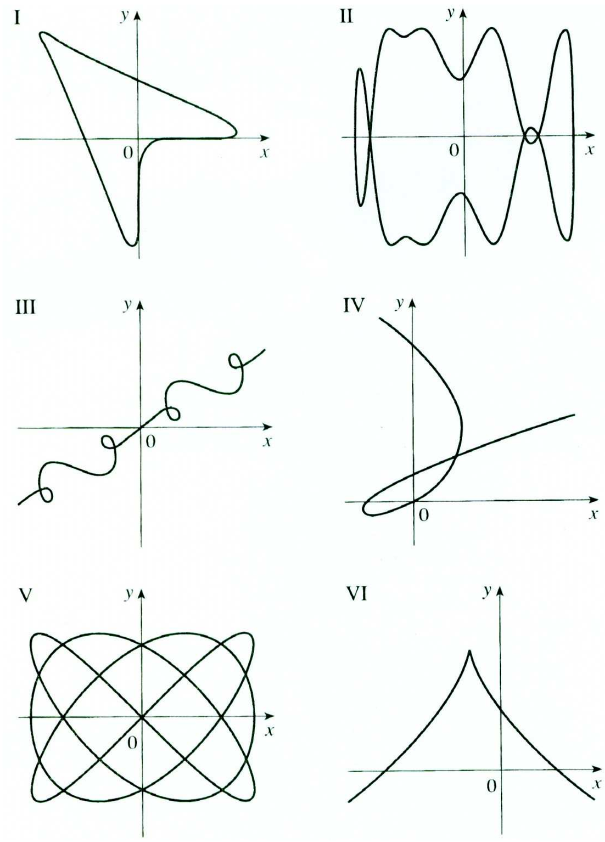
CURVAS E SUPERFÍCIES

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$
   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$
   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$
   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$
   (e)$\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$
   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t), \quad t \geq 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t), \quad t \in]-\pi/2, \pi/2[$
   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$
   (b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
   (c) $x = \operatorname{sen}(3t), \quad y = \operatorname{sen}(4t)$
   (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), \quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$
   (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \quad y = \cos(t + \cos t)$
   (f) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



3. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical. Esboce a imagem de γ, explicitando os pontos de auto-intersecção (se houver).

   (a) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$
   (b) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$
   (c) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$
   (d) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$

4. Considere a curva dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3} \right)$$

Determine o domínio de γ. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quando t tende a -1 pela direita e pela esquerda, bem como os limites quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Calcule $\gamma(0)$. Estude $\gamma'(t)$ e, finalmente, faça um esboço da curva.

5. Considere $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

6. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t \cos t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Esboce a curva.

7. Para cada curva abaixo, determine um ponto onde ocorre uma auto-intersecção. Ache as retas tangentes neste ponto.

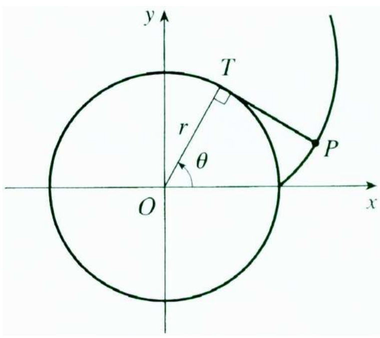
   (a) $\gamma(t) = (1 - 2\cos^2 t, (\operatorname{tg} t)(1 - 2\cos^2 t)), \ \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   (b) $\gamma(t) = (9(1 - 3t^2), \ \ 9t(1 - 3t^2))$

   (c) $\gamma(t) = \left(2 + 2\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right), 2t\left(\frac{1}{1 - t^2} + \frac{2}{1 + t^2}\right)\right)$

8. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



9. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (ou $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$) uma curva diferenciável. Mostre que se $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo t. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

10. Calcular o comprimento da curva γ:

    $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3), \ \ t \in [-4, 4];$
    $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t), \ 0 \leq t \leq \pi;$
    $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t), \ t \in [0, \pi].$

11. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y^z}$

(e) $f(x,y) = \operatorname{tg}(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$

(g) $f(x,y,z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

12. Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

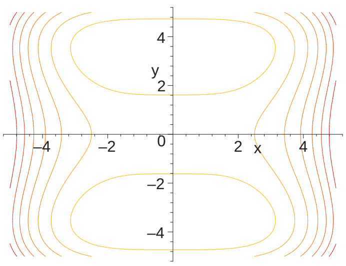
13. (a) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x,y,z)$ cuja distância até a origem é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P ao eixo Oz. Que superfície é essa? Reconheça a curva dada pela intersecção dessa superfície com o plano $y = 1$.

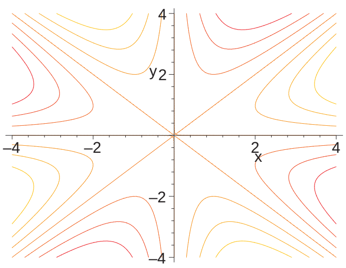
(b) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x,y,z)$ cuja distância ao ponto $Q = (0,-1,-2)$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P à reta $r : \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$.

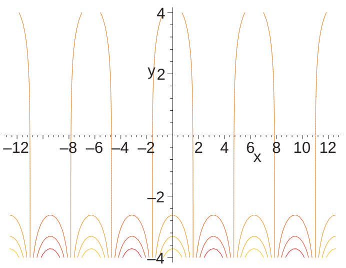
Que superfície é essa? Reconheça e encontre uma equação para a curva dada pela intersecção dessa superfície com o plano $z = 0$.

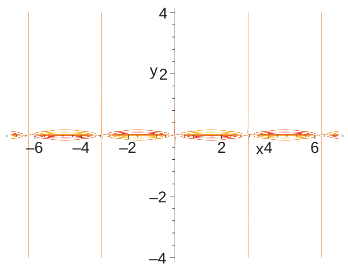
(c) Refaça (b), considerando $Q = (0,-1,-1)$ e $r : \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$

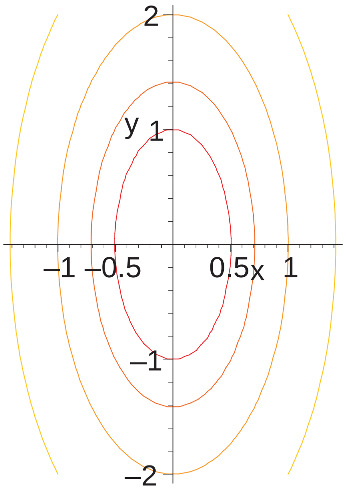
14. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

(I) 

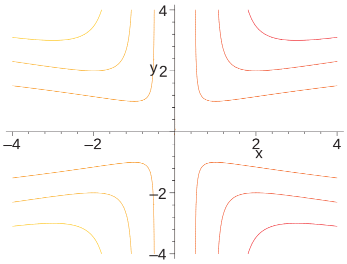
(II) 

(III) 

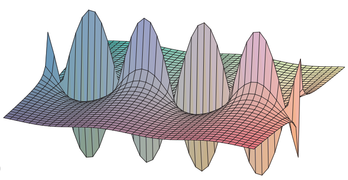
(IV) 



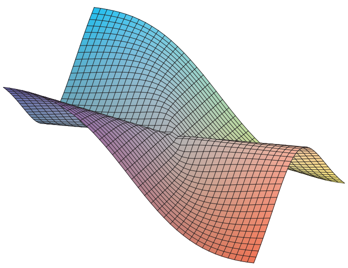
(V)



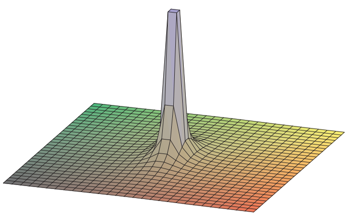
(VI)



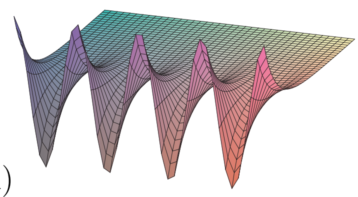
(a)



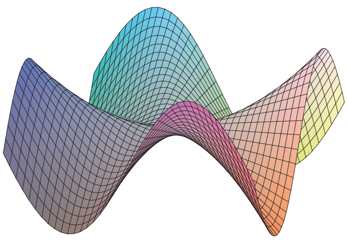
(b)



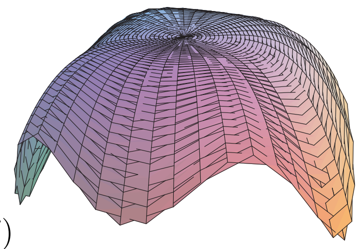
(c)



(d)



(e)



(f)

15. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

16. Descreva as superfícies de nível de:

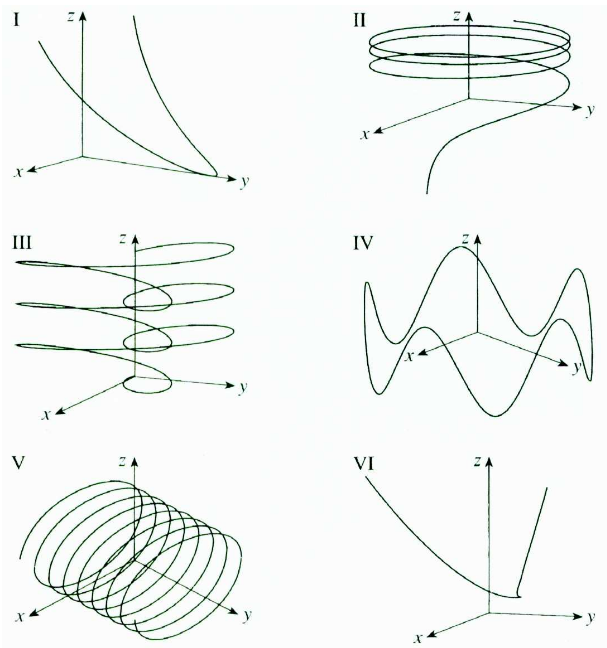
(a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
(c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$

17. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbb{R}$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
(c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t),\ t \geq 0$
(e) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$
(f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

18. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$
(c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t\ \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, t)$
(e) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



19. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ e o plano $y = 2$ têm como intersecção uma elipse. Ache a equação da reta tangente a esta elipse no ponto (1,2,2).

20. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

21. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{t^2 + 4}),\ t \geq 0$.
(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.
(b) Faça um esboço da imagem de γ.

22. Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

23. Seja $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$.
(a) Esboce as curvas de nível e o gráfico de f.
(b) O gráfico de f e o plano $z = 2x+1$ têm como intersecção uma curva. Parametrize-a.

24. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{sen}\, t, t), t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

25. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

26. O parabolóide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ e o plano $x = 1$ têm como intersecção uma parábola. Ache a equação da reta tangente a essa parábola no ponto (1,2,-4). Ache a intersecção dessa reta com o plano xy. Use um computador para visualizar, na mesma tela, os gráficos do parabolóide, da parábola e da reta tangente.

==

RESPOSTAS DA SEGUNDA PARTE

3. a) Hor.: $(0,-9)$; Vert.: $(-2,-6), (2,-6)$;
b) Hor.: $(-2,-2), (-4,2)$; Vert.: $(0,0), (-4,2)$;
c) Hor.: $(-3,-2), (1,2)$; Vert.: $(0,0), (\frac{-3}{16}, \frac{11}{8})$ e $(-8,2)$;
d) Hor.: $(4,-16), (-28,16)$; Vert.: $(0,0), (-1,-11)$.
Auto-intersecção:(a)$(0,0)$;(b)$(-4,2)$; (c) e (d) não têm

5. Não. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.

6. $y = x$ e $y = -x$

7. a) (0,0), $y = x$ e $y = -x$; b) (0,0), $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$; c) (1,0), $y = -\sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x$

10. $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$ $L(\gamma_1) = 64\sqrt{5}$; $L(\gamma_2) = 2\sqrt{2}$; $L(\gamma_3) = \frac{\pi^2}{2}$.

11. a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x\}$
b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$
c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1\}$
d) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y > 0\}$
e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x(y-x)(y+x) > 0\}$
g) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} < 4\}$

13. a) É um cone. Equação $z^2 = x^2 + y^2$

A curva é uma hipérbole.

b) É um cone. Equação: $5x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz - 10y - 20z = 25$

A curva é uma elipse. Equação $15x^2 + 9(y - \frac{5}{3})^2 = 100$

c) É um cone. Equação $x^2 - 2yz - 2z - 2y = 2$

A curva é uma parábola. Equação $x^2 - 2y = 2$

16. a) família de planos paralelos;
b) família de elipsóides com centro em $(0, 0, 0)$;
c) família de hiperbolóides de uma ou duas folhas;
d) família de cilindros hiperbólicos.

19. $X = (1, 2, 2) + \lambda(1, 0, -2),\ \lambda \in \mathbb{R}$

20. $\gamma(t) = (\ \frac{1}{2}(1 + \cos t), \frac{1}{2}\text{sen}\, t, \frac{1}{2}(1 + \cos t)\ )\ ,\ t \in [0, 2\pi]$

22. $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, -\cos 2t),\ t \in [0, 2\pi]$

23. (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^2 - 1}{4}, t, \dfrac{t^2 + 1}{2}\right),\ t \in \mathbb{R}$

25. $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\text{sen}\, t - 1, \text{sen}\, t - 1),\ t \in [0, 2\pi]$

26. $X = (1, 2, -4) + \lambda(0, 1, -8),\quad \lambda \in \mathbb{R}.$