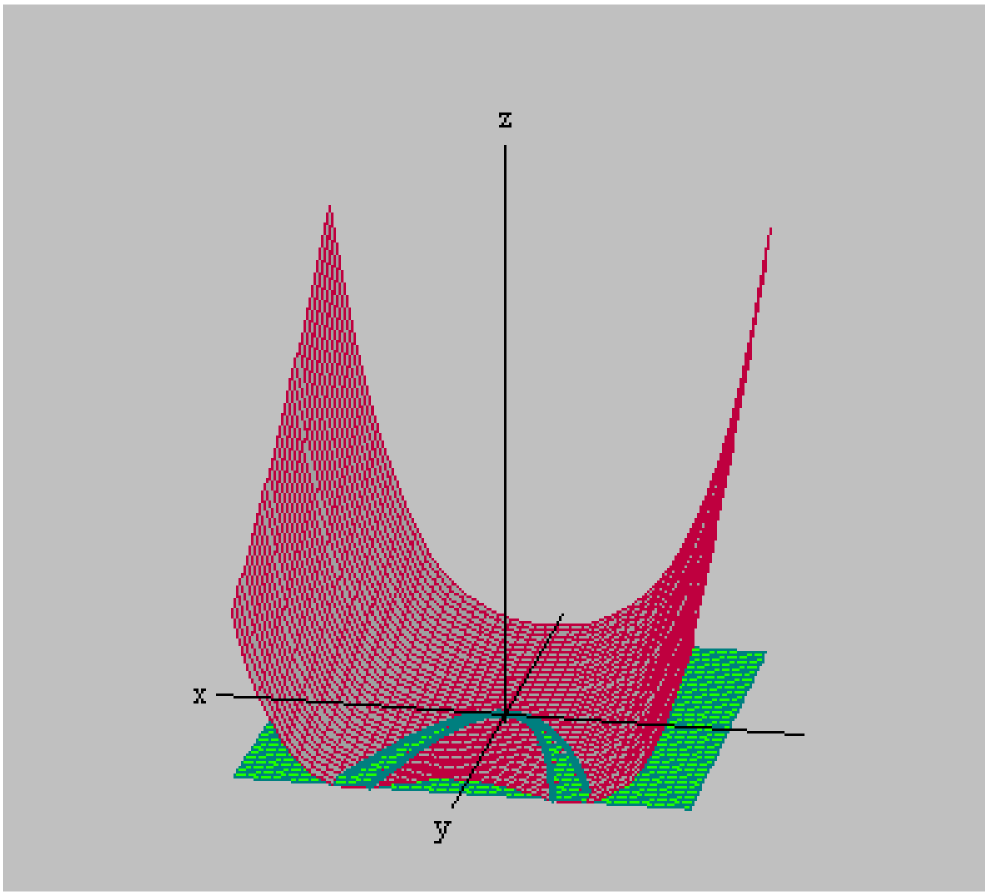
MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2006

Exercício 25 da Lista 3

A figura abaixo representa o gráfico de $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ e de seu plano tangente no ponto $(0,0,0)$ (que é o plano $z = 0$). Observe que $(0,0)$ é um *ponto de sela* de f, já que $f(0,0) = 0$ e em todo disco com centro em $(0,0)$, encontramos, por exemplo, pontos da forma $y = 3x^2$ com $x \neq 0$ e $f(x, 3x^2) = (2x^2)(x^2) = 2x^4 > 0$ e também pontos da forma $y = \frac{3}{2}x^2$ com $x \neq 0$ e $f(x, \frac{3}{2}x^2) = (\frac{1}{2}x^2)(-\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{4}x^4 < 0$



Por outro lado, **todo** plano paralelo ao eixo z e passando por $(0,0,0)$ intercepta o gráfico de f em uma curva que tem um mínimo local em $(0,0,0)$.
De fato, fazendo $y = mx$ com $m \neq 0$ e $g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 2x^2) = m^2x^2 - 3mx^3 + 2x^4$, temos que $g'(0) = 0$ e $g''(0) = 2m^2 > 0$; portanto 0 é ponto de mínimo local de g. Se $m = 0$, $g(x) = f(x, 0) = 2x^4$ e 0 é ponto de mínimo de g. Finalmente, se $x = 0$, $g(y) = f(0, y) = y^2$ e novamente, 0 é ponto de mínimo de g.
Veja a figura na próxima página.