5ª Questão: (2,0 pontos) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $S(x, y) = xy$ nos pontos da elipse $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

A

- PELO TEOREMA DE WEIERSTRASS, O PROBLEMA ADMITE SOLUÇÃO.
- VAMOS ENCONTRÁ-LA USANDO OS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

$$\nabla S(x,y) = \lambda\left(10x + 6y,\ 10y + 6x\right)$$

$\therefore$

$$\begin{cases} ① \quad y = \lambda(10x + 6y) \\ ② \quad x = \lambda(10y + 6x) \end{cases}$$

OBS.: $y = 0 \overset{①}{\Rightarrow} 0 = \lambda(10x)$ ⟨ $\lambda = 0 \overset{②}{\Rightarrow} x = 0$; $x = 0$

$x = 0 \overset{②}{\Rightarrow} 0 = \lambda(10y)$ ⟨ $\lambda = 0 \overset{①}{\Rightarrow} y = 0$; $y = 0$

ASSIM: $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

(E $(0,0)$ É SOLUÇÃO!)

(MAS NÃO ESTÁ NA ELIPSE)

ASSIM, PODEMOS SUPOR $x \neq 0$ E $y \neq 0$

DIVIDINDO: $\dfrac{①}{②} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{10x + 6y}{10y + 6x} \Leftrightarrow 10y^2 + 6xy = 10x^2 + 6xy$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \pm x}$ ③

MAS $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0 \quad \therefore \overset{③}{\Rightarrow} 5x^2 + 5x^2 \pm 6x^2 - 64 = 0$

$\Rightarrow 16x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 2$

ou $\Rightarrow 4x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 4$

$\therefore$ $(0,0)$, $(2,2)$, $(-2,-2)$, $(-4,+4)$, $(+4,-4)$ SÃO OS CANDIDATOS!

CALCULANDO:

$S(0,0) = 0$

$S(2,2) = 4$

$S(4,-4) = -16$

$S(-2,-2) = 4$

$S(-4,4) = -16$

$\therefore$

$(2,2)$, $(-2,-2)$	MÁXIMOS
$(4,-4)$, $(-4,4)$	MÍNIMOS